



Российская Академия Наук

Отделение математических наук

М.Г. Широбоков, С.П. Трофимов

**Проектирование
межпланетных перелетов
с несколькими гравитационными
маневрами и промежуточными
импульсами**

Москва 2017

УДК 520
ББК 22.67
Ш64

Широбоков М.Г., Трофимов С.П. Проектирование межпланетных перелетов с несколькими гравитационными маневрами и промежуточными импульсами – М., РАН, 2017.

Анотация: *В работе решается задача проектирования межпланетных траекторий с несколькими гравитационными маневрами и промежуточными импульсами с помощью разработанного авторами метода виртуальных траекторий. Даны алгоритмы расчетов гелиоцентрических и планетоцентрических участков, рассматривается случай резонансных траекторий. Описаны результаты применения метода виртуальных траекторий к задаче проектирования перелета к Юпитеру, полученные траектории сравниваются с траекториями миссий Juno, Europa Clipper и Laplace.*

Shirobokov M.G., Trofimov S.P. Design of Interplanetary Trajectories with Swing-Bys and Deep Space Maneuvers / – Moscow, Russian Academy of Sciences, 2017.

Abstract: *In the paper, the problem of designing interplanetary trajectories with several swing-bys and deep-space maneuvers is solved using the method of virtual trajectories developed by the authors. The algorithms for the calculation of both heliocentric and planetocentric trajectory arcs are presented, including the case of resonant trajectories. The results of applying the method of virtual trajectories to the problem of designing an interplanetary transfer to Jupiter are given and compared with the baseline trajectories for the Juno, Europa Clipper, and Laplace missions.*

Проектирование межпланетных перелетов с несколькими гравитационными маневрами и промежуточными импульсами

М.Г. Ширококов, С.П. Трофимов

1. Введение

На протяжении всей истории космонавтики гравитационные маневры были полезным инструментом проектирования межпланетных миссий и эффективным средством достижения планет-целей для проведения научных исследований. Значительное количество межпланетных миссий неоднократно подтверждало важность использования гравитационных маневров. Примерами являются Маринер-10 с гравитационным маневром у Венеры с целью снижения скорости и достижения Меркурия, Пионер-11 с гравитационным маневром у Юпитера с целью увеличения скорости и достижения Сатурна.

Успех миссий на основе использования гравитационных маневров повлек продолжение программы по исследованию космоса и планет при помощи АМС Вояджер-1, посетившей Юпитер и Сатурн, а также АМС Вояджер-2, двигавшейся вдоль планетной последовательности Земля–Юпитер–Сатурн–Уран–Нептун (EJSUN). Другие успешные проекты исследования планет Солнечной системы включают АМС Галилео с маршрутом EVEEJ, АМС Кассини-Гюйгенс с маршрутом EVVEJS. Второй аппарат на Меркурий, Мессенджер, запущенный в 2004 году, выполнил один маневр у Земли и два дополнительных маневра у Венеры. Далее последовала серия из трех маневров около Меркурия с целью снизить относительную скорость (EEVVMеMeMeMe).

Проектирование траекторий, содержащих гравитационные маневры, до создания современных высокопроизводительных вычислительных средств опиралось в значительной степени на интуицию баллистиков и использование некоторых простых аналитических и графических средств типа диаграммы Тиссерана. Точный расчет полученных таким путем приближенных траекторий осуществлялся с помощью методов локальной оптимизации и теории оптимального управления и представлял собой, как правило, ньютоновский или квазиньютоновский итерационный процесс. Однако даже для простых межпланетных перелетов оптимизируемый функционал – характеристическая скорость – имеет множество локальных минимумов и может быть в некоторых точках недифференцируемым или даже разрывным [1]. Как следствие, выбор начальной точки – приближенной траектории – оказывает сильное влияние на сходимость итерационного процесса и качество выполненной оптимизации (близость найденного оптимума к глобальному).

Классический метод полного перебора, использовавшийся с самого начала космической эры для проектирования межпланетных полетов, заключается в случае прямого перелета в переборе дат старта и времени полета и численном решении получающихся при этом задач Ламберта [2, 3]. Траектории же с промежуточными гравитационными маневрами разбиваются на участки «планета-планета», к которым применяется та же самая процедура. Метод полного перебора оказывается весьма ресурсозатратным при решении задачи оптимизации траекторий с большим числом гравитационных маневров.

Современный подход в технологии проектирования межпланетных траекторий заключается в автоматической генерации множества локально-оптимальных приближенных траекторий методами глобальной оптимизации. Здесь можно отметить попытки использования генетических алгоритмов [4, 5], нейронных сетей [6] и методов параллельных вычислений [7]. Отметим идею применения стохастического поиска для задачи оптимизации сложных траекторий, впервые описанная в работе [8], где было предложено использование генетических алгоритмов в много-

критериальной оптимизации (NSGA) для поиска перелетов «планета-планета» с малой тягой. Алгоритм имитирует эволюцию популяции индивидуумов, представленных как возможные траектории, чьи хромосомы закодированы начальными значениями множителей Лагранжа и полным временем полета. Статья представляет некоторые примеры оптимальных по Парето траекторий от Земли к Марсу. Можно отметить также создание М. Vasile в 2003 г. стохастического глобального оптимизатора (EPIC), который был протестирован и успешно применяется в решении задач с межпланетными полетами [9].

В последние несколько лет отмечается сфокусированность на смешении различных техник глобальной оптимизации. Например, в [10] показано, что совместное использование в многокритериальной оптимизационной процедуре дифференциальной эволюции [11, 12] и генетических алгоритмов может быть эффективным. В 2008 году Vasile было предложено обобщение дифференциальной эволюции и метода роя частиц [13] в форме динамической системы с дискретным временем.

Среди отечественных работ по тематике проектирования сложных межпланетных траекторий можно выделить создание метода сквозной оптимизации траекторий аппаратов с малой тягой [14]. В качестве средства преодоления затруднений с выбором начального приближения хорошо зарекомендовал себя метод продолжения по параметру, применимый в задачах и с большой, и с малой тягой [15, 16].

Целью данной работы является создание эффективного с точки зрения быстродействия метода проектирования межпланетных траекторий, который был бы одновременно простым в реализации и позволял бы получать траектории в практически значимом классе задач: с пассивными гравитационными маневрами и импульсами в глубоком космосе. Для достижения поставленной цели выбираются подходящие модели и предположения, касающиеся приближений траекторий КА и орбит планет, подробно описываются расчеты всех необходимых параметров движения КА и выполняется поиск оптимальных траекторий.

В разделе 2 перечислены все основные используемые в данной работе модели и предположения. Раздел 3 подробно описывает содержание разработанного метода виртуальных траекторий в применении к проектированию межпланетных траекторий с пассивными гравитационными маневрами и импульсами в глубоком космосе, а в разделе 4 поясняется, каким образом происходит построение базы виртуальных траекторий. Способ наложения реального движения планет на виртуальные траектории, т.е. учета связи между положением планет и временем, излагается в разделе 5. В разделе 6 приводится сравнение разработанного метода с классическим. В разделе 7 представлены примеры использования МВТ для решения модельных задач полета к Юпитеру.

2. Основные предположения

В работе решается задача проектирования оптимальных межпланетных траекторий с гравитационными маневрами. Космический аппарат (КА) оснащен двигателем большой тяги (химическим двигателем большой мощности). Траектория формируется из участков пассивного полета, соединяющихся между собой в точках приложения управляющих импульсов при выполнении маневров в глубоком космосе.

Орбиты планет считаются некомпланарными кеплеровыми эллипсами, элементы которых берутся на некоторую эпоху. К примеру, авторами использовались орбитальные элементы планет по отношению к средней эклиптике и среднему равноденствию на эпоху J2000.0. (<http://www.sai.msu.ru/neb/rw/natsat/plaorbw.htm> от 19.X.2017).

Как это делается в большинстве методов проектирования межпланетных траекторий, будем пользоваться моделью сопряженных конических сечений: внутри сфер действия планет (на планетоцентрических участках траектории) учитывается только притяжение соответствующей планеты, вне сфер действия планет – на гелиоцентрических участках – только притяжение Солнца (сферы действия на этом этапе считаются точечными).

3. Проектирование межпланетных миссий с пассивными гравитационными маневрами

Метод виртуальных траекторий состоит из двух этапов. На первом этапе для построения базы виртуальных траекторий необходимо провести дискретизацию: на орбите каждой из планет, входящих в выбранный планетный маршрут, отметим, идя с небольшим по истинной аномалии шагом (постоянным или переменным), набор узловых точек (рис. 1). Виртуальной траекторией в данной работе будем называть траекторию, проходящую через планетные узлы, с активными гелиоцентрическими участками (в некоторой точке на этом участке происходит мгновенное изменение скорости) и пассивными гравитационными маневрами.

3.1. Расчет гелиоцентрического участка траектории

Приступим теперь к детальному описанию расчетов на участках траекторий. Рассмотрим один из гелиоцентрических участков. Пусть \mathbf{r}_1 – радиус-вектор начальной точки участка – узла планеты 1, а \mathbf{r}_2 – радиус-вектор конечной точки участка – узла планеты 2, \mathbf{u}_1 – вектор скорости планеты 1 в точке \mathbf{r}_1 (далее, ссылаясь на точки/узлы, будем просто указывать их радиус-вектор). Местная параболическая скорость равна $v_{\text{пар}} = \sqrt{2\mu_s/r_1}$, $r_1 = |\mathbf{r}_1|$. Здесь μ_s – гравитационный параметр Солнца. Орбитальный угловой момент планеты 1 определяется вектором $\mathbf{c}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1$.



Рис. 1. Дискретизация орбит планет.

Задавая угол наклона траектории θ в точке \mathbf{r}_1 (его также называют углом подъема траектории или углом тангажа) можно определить скорость КА в \mathbf{r}_1 по формула

$$\left(\frac{v_1}{v_{\text{par}}} \right)^2 = \frac{1}{2 \cos \theta} \frac{1 - \cos \varphi_{12}}{r_1 \cos \theta / r_2 - \cos(\theta + \varphi_{12})},$$

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \sin \theta \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} + v_1 \cos \theta \frac{(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_1}{|(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_1|} \operatorname{sgn}(\mathbf{c}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)),$$

где φ_{12} – угловая дальность перелета между \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Отсюда можно получить все параметры орбиты перелета из точки \mathbf{r}_1 в точку \mathbf{r}_2 .

Опишем теперь вариант выбора точек для маневров в глубоком космосе. После того как определены все параметры движения вдоль траектории, соединяющей узлы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , вычисляются значения эксцентрических аномалий E_1 и E_2 , соответствующих узлам \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Затем выбираются значения эксцентрических аномалий из множества

$$E^{(i)} = E_1 + \frac{E_2 - E_1}{1 + N}(i - 1), \quad i = 2, \dots, N + 1,$$

которые и будут соответствовать точкам для маневров в глубоком космосе.

Далее, пусть на участке орбиты между точками \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 выбрана точка \mathbf{r}_0 , в которой требуется совершить маневр в глубоком космосе (см. рис. 2). На орбите планеты 2 выбирается точка \mathbf{r}'_2 , в которую требуется построить траекторию из точки \mathbf{r}_0 . Обозначим за Δv_{lim} максимально допустимую величину приращения характеристической скорости на данном участке траектории. Здесь под приращением характеристической скорости понимается

$$\Delta v = |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}'_0|,$$

где \mathbf{v}_0 – скорость КА в \mathbf{r}_0 до маневра, \mathbf{v}'_0 – скорость после ма-

невра. Угол наклона траектории до маневра в точке \mathbf{r}_0 определяется скоростью \mathbf{v}_0 и вычисляется по формуле

$$\theta_{v_0} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{|\mathbf{r}_0| \cdot |\mathbf{v}_0|}.$$

Угол наклона траектории после маневра полностью определяет траекторию из \mathbf{r}_0 в \mathbf{r}'_2 и величину маневра. С практической точки зрения, удобно рассматривать углы наклона траектории после маневра из интервала $\theta_{v_0} \pm \Delta\theta$, где $\Delta\theta = \Delta v_{\text{lim}} / |\mathbf{v}_0|$. Отметим, что здесь нас интересуют только те углы наклона траектории $\theta_{v'_0}$, при которых возможно движение из \mathbf{r}_0 в \mathbf{r}'_2 , т.е. для которых выполнено

$$\left(\frac{v'_0}{v_{0,\text{par}}} \right)^2 \equiv \frac{1}{2 \cos \theta_{v'_0} r_0 \cos \theta_{v'_0} / r' - \cos(\theta_{v'_0} + \varphi)} > 0,$$

где $v'_0 = |\mathbf{v}'_0|$ – модуль скорости после маневра, $v_{0,\text{par}}$ – параболическая скорость в точке \mathbf{r}_0 , φ – угловая дальность между \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}'_2 .

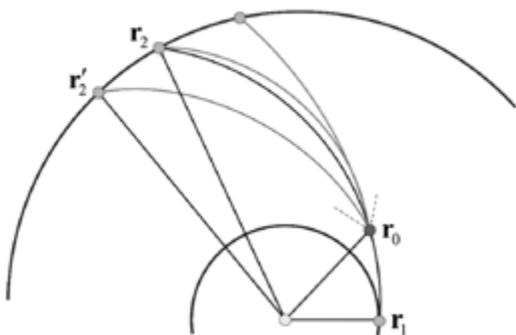


Рис. 2. Пучок траекторий из точки маневра.

После того как угол наклона траектории после маневра выбран, можно найти вектор скорости \mathbf{v}'_0 в точке \mathbf{r}_0 после маневра. Тогда величину приращения характеристической скорости $\Delta v = |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}'_0|$ следует сравнить с предельно допустимым зна-

чением Δv_{lim} и случае $\Delta v \leq \Delta v_{\text{lim}}$ сохранить данные о полученной траектории, проходящей через точки \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}'_2 . В противном случае такая траектория отклоняется и в базу данных не попадает. По известным параметрам двух соответствующих кеплеровых дуг можно найти времена полета из \mathbf{r}_1 в \mathbf{r}_0 и из \mathbf{r}_0 в \mathbf{r}'_2 , а также скорость прибытия \mathbf{v}'_2 в точку \mathbf{r}'_2 . Так рассчитываются все параметры траектории между узлами планеты 1 и планеты 2. Аналогичные вычисления можно выполнить для любых двух узлов на орбитах планет, «соседствующих» в выбранном планетном маршруте. Для резонансных виртуальных траекторий перелет может совершаться между двумя узлами на орбите одной и той же планеты.

3.2. Расчет планетоцентрического участка траектории

Перейдем теперь к рассмотрению движения КА на планетоцентрических участках траектории. Пусть рассматривается узел некоторой планеты с радиус-вектором \mathbf{r} . Планетоцентрическую скорость на входе в сферу действия будем считать известной, обозначим ее $v_{\text{in}}^{\text{rel}}$. Если это первая планета маршрута, то величина $v_{\text{in}}^{\text{rel}}$ просто равна заданному гиперболическому избытку на выходе из сферы действия планеты; в остальных случаях она вычисляется по формуле

$$v_{\text{in}}^{\text{rel}} = \left| \mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{gelio}} - \mathbf{u} \right|,$$

где $\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{gelio}}$ – гелиоцентрическая скорость на входе в сферу действия в точке \mathbf{r} , найденная из рассмотрения соответствующего гелиоцентрического участка, \mathbf{u} – скорость планеты в точке \mathbf{r} .

Пусть выбран \mathbf{r}' – радиус-вектор узла следующей планеты в маршруте. Вычислим гелиоцентрическую скорость на выходе из сферы действия планеты $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}}$, которая бы определяла траекторию из узла \mathbf{r} в узел \mathbf{r}' , при условии, что вход в сферу действия планеты осуществляется со скоростью $v_{\text{in}}^{\text{rel}}$, гравитационный маневр пассивный, а минимальное расстояние до планеты будет отвечать некоторым требованиям-ограничениям. Именно, бу-

дем считать, что для каждой планеты определены радиус сферы действия $r_{\pi, \max}$ (ограничение «сверху») и некоторое безопасное расстояние $r_{\pi, \min}$ (ограничение «снизу»). Величина $r_{\pi, \max}$ может быть выбрана равной радиусу сферы действия, а $r_{\pi, \min}$ может определяться радиусом планеты и толщиной ее атмосферы. Обозначим $v_p = \sqrt{2\mu_s/r}$ за параболическую скорость в точке \mathbf{r} .

Искомый вектор гелиоцентрической скорости КА на выходе из сферы действия планеты можно представить как направленный отрезок с центром в точке \mathbf{r} и концом на сфере S радиуса $R = v_{\text{out}}^{\text{rel}} = v_{\text{in}}^{\text{rel}}$ с центром на конце направленного отрезка \mathbf{u} , исходящего из точки \mathbf{r} , $v_{\text{out}}^{\text{rel}} = \left| \mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{rel}} \right|$ (см. рис. 3). Так как траектория должна лежать в плоскости, образованной векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' (для краткости, будем обозначать эту плоскость буквой Π), то и вектор искомой скорости $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}}$ необходимо лежит в этой плоскости, которая отсекает от сферы S окружность O радиуса $\tilde{n} = \sqrt{R^2 - d^2}$, где d – расстояние от центра сферы S до плоскости Π .

Пусть $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{u}$ – орбитальный угловой момент планеты. Вектор нормали к плоскости Π определим равенством

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'|} \operatorname{sgn} \left(\mathbf{c} \cdot \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'|} \right)$$

(здесь рассматривается случай неколлинеарных векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Случай совпадения этих векторов рассматривается ниже). Пусть Φ – угловая дальность между \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Введем следующий базис:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{r} / r, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1.$$

Матрица перехода из эклиптической системы координат в систему координат, образованную векторами этого базиса, представляется в виде

$$M = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3]^T.$$

Отсюда следует, что компоненты центра окружности O в базисе векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 есть первые две компоненты вектора $M\mathbf{u}$, а величина d равна третьей компоненте этого вектора.

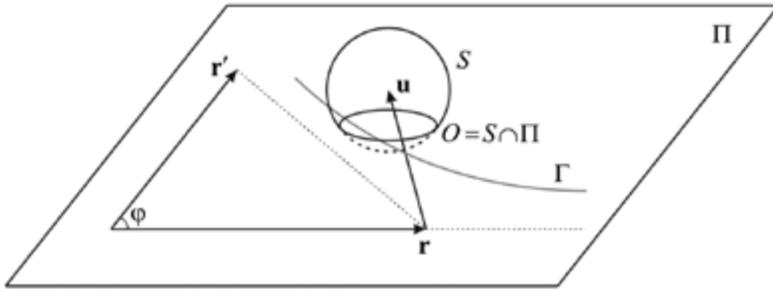


Рис. 3. К определению параметров пассивного гравитационного маневра

Известно, что множеству векторов скорости, которые определяют траектории между двумя неколлинеарными точками (в нашем случае \mathbf{r} и \mathbf{r}'), можно однозначно сопоставить некоторую гиперболу Γ с асимптотами, направленными вдоль векторов \mathbf{r} и $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Таким образом, конец вектора $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}}$ лежит в точках пересечения гиперболы Γ и окружности O , которых в общем случае может быть не более четырех, так как гипербола и окружность представляют собой кривые второго порядка. С практической точки зрения нас интересуют решения, отвечающие орбитальным угловым моментам КА, которые составляют острые углы с направлением на северный полюс эклиптики. Таким образом, остаются не более двух точек пересечения гиперболы и окружности.

Получим уравнение гиперболы. Для этого обратимся к равенству

$$\left(v_{\text{out}}^{\text{gelio}}\right)^2 = \frac{v_p^2}{2 \cos \theta} \frac{1 - \cos \varphi}{a \cos \theta - \cos(\theta + \varphi)},$$

где $a = r / r'$, θ – угол наклона траектории в точке \mathbf{r} на выходе из сферы действия, φ – угловая дальность. Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} u = \pi/2 - \theta \\ x = v_{\text{out}}^{\text{gelio}} \cos u \\ y = v_{\text{out}}^{\text{gelio}} \sin u \end{cases}$$

Здесь (x, y) – декартовы координаты в плоскости Π в базисе векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , u – полярный угол, измеряемый от направления \mathbf{e}_1 . Таким образом, уравнение гиперболы Γ запишется в виде

$$y = \frac{A}{By + Cx},$$

где постоянные $A = v_p^2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}$, $B = a - \cos \Phi$, $C = \sin \Phi$. Уравнение же окружности записывается в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2,$$

где $M\mathbf{u} \equiv (x_0, y_0, d)^T$.

Задача о поиске пересечений гиперболы Γ и окружности O сводится к решению алгебраического уравнения 4-ой степени и отбору таких решений, которые определяют движение КА с орбитальным угловым моментом, составляющим острый угол с орбитальным угловым моментом планеты \mathbf{c} . Рассмотрим два случая.

В случае $\text{sgn}(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}')) > 0$ имеем $C > 0$. Тогда удобно выполнить преобразование координат $x = X - BY$, $y = CY$ и искать решения с $y > 0$. В этом случае система

$$\begin{cases} x = X - BY \\ y = CY \\ By^2 + Cxy = A \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \tilde{n}^2 \end{cases}$$

приводит к алгебраическому уравнению 4-ой степени

$$p_1 X^4 + p_2 X^3 + p_3 X^2 + p_4 X + p_5 = 0$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, \\ p_2 &= -2x_0, \\ p_3 &= x_0^2 + y_0^2 - \tilde{n}^2 - 2BD, \\ p_4 &= 2D(Bx_0 - Cy_0), \\ p_5 &= D^2(B^2 + C^2). \end{aligned}$$

Здесь было введено обозначение $D = A / C^2$.

Если же $\text{sgn}(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}')) < 0$, то $C < 0$. В этом случае удобно рассматривать преобразование $x = BX - Y$, $y = -CX$ и искать решения с $y > 0$. Аналогично, получаем уравнение

$$p_1 X^4 + p_2 X^3 + p_3 X^2 + p_4 X + p_5 = 0$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} p_1 &= B^2 + C^2, \\ p_2 &= 2(Cy_0 - Bx_0), \\ p_3 &= x_0^2 + y_0^2 - \tilde{n}^2 - 2BD, \\ p_4 &= 2Dx_0, \\ p_5 &= D^2. \end{aligned}$$

Заметим, что в обоих случаях $Y = D / X$ и, более того, выражение $y > 0$ равносильно $X > 0$. По значениям найденных пар (не более двух) (X, Y) с помощью линейного преобразования легко восстанавливаются соответствующие пары (x, y) , а следовательно, величины $v_{\text{out}}^{\text{gelio}} = \left| \mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}} \right|$ и углы наклона траектории θ . Этих данных достаточно для определения векторов скорости $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}}$, отвечающих траекториям из \mathbf{r} в \mathbf{r}' .

Пусть теперь даны гелиоцентрические векторы входа и выхода из сферы действия планеты $\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{gelio}}$ и $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}}$ соответственно, а также скорость планеты \mathbf{u} . Тогда легко определить перигелиальное расстояние до планеты. Относительные скорости КА равны соответственно $\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}} = \mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{gelio}} - \mathbf{u}$ и $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{rel}} = \mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}} - \mathbf{u}$. Угол поворота вычисляется по формуле

$$\alpha = \arccos \frac{\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{rel}}}{\left| \mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}} \right| \cdot \left| \mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{rel}} \right|}$$

Эксцентриситет гиперболической орбиты

$$e = \frac{1}{\sin(\alpha / 2)},$$

перигелиальное расстояние

$$r_{\pi} = \mu_P \frac{e - 1}{\left(v_{\text{out}}^{\text{rel}}\right)^2},$$

где μ_P – гравитационный параметр планеты. Если перигелиальное расстояние удовлетворяет условию $r_{\delta, \min} \leq r_{\delta} \leq r_{\delta, \max}$, то данные о полученной траектории сохраняются, иначе траектория отклоняется и в базу данных не попадает.

Теперь рассмотрим случай, когда КА движется в тот же планетный узел, т.е. когда $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Любая точка на сфере S определяет выходную гелиоцентрическую скорость $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}}$, двигаясь с которой КА вновь через некоторое время вернется в положение \mathbf{r} . Но ограничимся лишь такими траекториями, периоды орбит T которых составляют кратное число периодов орбит планеты T_{planet} , в поле которой совершается данный гравитационный маневр, а именно

$$T = k \cdot T_{\text{planet}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как большая полуось орбиты на гелиоцентрическом участке на выходе из сферы действия планеты связана с периодом орбиты выражением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_S}},$$

то значения больших полуосей a_k , отвечающие разным $k = 1, 2, \dots$, а также значения выходной гелиоцентрической скорости в точке \mathbf{r} , будут определяться по формулам

$$a_k = \sqrt[3]{\left(\frac{kT_{\text{planet}}}{2\pi}\right)^2 \mu_S}, \quad v_{\text{out}}^{\text{gelio}} = \sqrt{\frac{2\mu_S}{r} - \frac{\mu_S}{a_k}} \quad (1)$$

Абсолютные значения выходной гелиоцентрической скорости, задаваемые формулами (1), для каждого $k = 1, 2, \dots$ определяют сферы S_k с центром на конце вектора \mathbf{r} и радиусом $v_{\text{out}}^{\text{gelio}}$. Если для некоторого k сфера S_k не пересекает сферу S , то не суще-

ствует пассивного гравитационного маневра, который переводил бы КА на орбиту с периодом $T = kT_{\text{planet}}$.

Пусть пересечение сфер S_k и S существует. Кривой пересечения двух сфер в таком случае является окружность O_k (случай точки не рассматривается), содержащее бесконечное количество точек, которое можно сузить, учитывая ограничения на значения перигелиального расстояния r_δ :

$$r_{\pi,\min} \leq r_\pi = \mu_P \frac{e-1}{(v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2} \leq r_{\pi,\max}.$$

Отсюда вытекает ограничение на синус половины угла поворота орбиты

$$\frac{1}{1 + (v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2 \frac{r_{\pi,\max}}{\mu_P}} \leq \sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{1 + (v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2 \frac{r_{\pi,\min}}{\mu_P}},$$

и, окончательно, ограничения на косинус угла поворота орбиты

$$1 - \frac{2}{\left(1 + (v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2 \frac{r_{\pi,\min}}{\mu_P}\right)^2} \leq \cos \alpha \leq 1 - \frac{2}{\left(1 + (v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2 \frac{r_{\pi,\max}}{\mu_P}\right)^2}.$$

Центр O окружности O_k лежит на прямой, соединяющей центры сфер S_k и S , т.е. на прямой, проходящей вдоль вектора \mathbf{u} , на расстоянии

$$u_0 = \frac{(v_{\text{out}}^{\text{gelio}})^2 - (v_{\text{in}}^{\text{rel}})^2}{2u} + \frac{u}{2}$$

от начала вектора \mathbf{u} . Окружность O_k лежит в плоскости, которая проходит через точку O и ортогональна вектору \mathbf{u} , причем ее радиус равен

$$R = \sqrt{(v_{\text{out}}^{\text{gelio}})^2 - u_0^2}.$$

Введем два ортогональных вектора $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{u} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{u})}{|\mathbf{u} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{u})|}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{u}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{u}|}.$$

Будем параметризовать окружность O_k углом φ , который составляет отрезок, соединяющий точку на окружности и ее центр, с направлением \mathbf{E}_1 , причем отсчет в положительном направлении будем вести против часовой стрелки, если смотреть из начала вектора \mathbf{u} . Тогда положение некоторой точки A на окружности O_k с параметром φ будет задаваться формулой

$$\mathbf{OA} = R(\mathbf{E}_1 \cos \varphi + \mathbf{E}_2 \sin \varphi),$$

а соответствующие значения гелиоцентрической и планетноцентрической скоростей запишутся в виде

$$\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}} = \mathbf{OA} + \mathbf{u} \frac{u_0}{u},$$

$$\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{rel}} = \mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}} - \mathbf{u}.$$

Получим выражение для $\cos \alpha$ как функции угла φ . Вспомогая, что

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{rel}}}{|\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}}| \cdot |\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{rel}}|},$$

получим условия на параметр φ

$$g_{\min} \leq A \cos \varphi + B \sin \varphi + C \leq g_{\max}$$

где были введены обозначения

$$A = R(\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}} \cdot \mathbf{E}_1),$$

$$B = R(\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}} \cdot \mathbf{E}_2),$$

$$C = (\mathbf{v}_{\text{in}}^{\text{rel}} \cdot \mathbf{u}) \frac{u_0 - u}{u},$$

$$g_{\min} = \left(v_{\text{in}}^{\text{rel}} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{\left(1 + \left(v_{\text{in}}^{\text{rel}} \right)^2 \frac{r_{\delta, \min}}{\dot{r}_P} \right)^2} \right),$$

$$g_{\max} = \left(v_{\text{in}}^{\text{rel}} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{\left(1 + \left(v_{\text{in}}^{\text{rel}} \right)^2 \frac{r_{\delta, \max}}{\dot{r}_P} \right)^2} \right).$$

Неравенства можно переписать в эквивалентном виде:

$$\frac{g_{\min} - C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \leq \sin(\varphi + \theta) \leq \frac{g_{\max} - C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где $\theta = (-1)^{\frac{\text{sgn}A-1}{2}} \arccos \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Неравенства и формула могут быть использованы для расчета гелиоцентрических скоростей $\mathbf{v}_{\text{out}}^{\text{gelio}}$ на выходе из сферы действия планеты. Двигаясь с такой скоростью, КА сделает виток вокруг Солнца за время, кратное сидерическому периоду движения планеты. Более того, его траектория на припланетном участке полета будет удовлетворять требованиям безопасности с точки зрения максимального приближения к планете.

4. Построение базы виртуальных траекторий

Теперь, задав формулы для расчета параметров произвольных гелиоцентрического и планетоцентрического участков полета,

можно перейти к описанию процесса построения базы виртуальных траекторий.

Будем считать, что изначально имеется база данных **PLANETS**, в которой для всех узлов на орбите каждой из планет Солнечной системы хранятся сведения о координатах узла в гелиоцентрической эклиптической системе координат, скорости планеты в узле и времена прохождения узла планетой.

На первом гелиоцентрическом участке любой виртуальной траектории начальная точка является одним из узлов на орбите Земли. Формируется таблица, столбцы которой содержат данные в следующем порядке:

1. n_1 – порядковый номер начального узла первого участка;
2. \mathbf{r}_1 – радиус-вектор этого узла;
3. $\mathbf{v}_1^{\text{rel}}$ – вектор планетоцентрической скорости КА на выходе из сферы действия планеты старта;
4. $\mathbf{v}_1^{\text{gelio}}$ – вектор гелиоцентрической скорости КА на выходе из сферы действия планеты старта;
5. \mathbf{r}_{12} – радиус-вектор точки маневра в глубоком космосе на первом гелиоцентрическом участке;
6. $\mathbf{v}_{12}^{\text{in}}$ – вектор скорости КА в точке \mathbf{r}_{12} до маневра;
7. $T_{1,1}$ – время полета от \mathbf{r}_1 до \mathbf{r}_{12} ;
8. n_2 – порядковый номер узла второй планеты в маршруте;
9. \mathbf{r}_2 – радиус-вектор этого узла;
10. Φ – угловая дальность между \mathbf{r}_{12} и \mathbf{r}_2 ;
11. θ – угол наклона траектории в точке \mathbf{r}_{12} после маневра;
12. $\mathbf{v}_{12}^{\text{out}}$ – вектор скорости КА в точке \mathbf{r}_{12} после маневра;
13. Δv_1 – величина характеристической скорости в точке \mathbf{r}_{12} ;
14. $T_{1,2}$ – время полета от \mathbf{r}_{12} до \mathbf{r}_2 ;
15. T_1 – время полета от \mathbf{r}_1 до \mathbf{r}_2 ;
16. \mathbf{v}_2^{in} – гелиоцентрическая скорость входа в сферу действия второй планеты маршрута;

17. r_{δ} – перицентральное расстояние до планеты во время гравитационного маневра;

18. $\mathbf{v}_2^{\text{out}}$ – гелиоцентрическая скорость выхода из сферы действия планеты.

Особенностью первого гелиоцентрического участка является выбор гиперболического избытка скорости из некоторого допустимого множества скоростей, которое определяется характеристиками маршевых двигателей ракеты-носителя и разгонного блока, а также массой M_p полезной нагрузки и массой M_{ef} дополнительной двигательной установки вместе с запасом топлива для нее. Так, при $M_p + M_{\text{ef}} \approx 1000$ кг для ракеты-носителя «Союз-ФГ» и разгонного блока «Фрегат» максимальное значение гиперболического избытка скорости при старте не превышает 4 км/с.

Перебираются все допустимые значения \mathbf{r}_1 , $|\mathbf{v}_1^{\text{rel}}|$, \mathbf{r}_2 и ϵ , в результате чего формируется массив **VTD** виртуальных траекторий от Земли до второй планеты в выбранном планетном маршруте. Размерность этого массива равна $32 \times N$, где N – число таких траекторий. Первые 10 строк соответствуют данным с 1 по 4 пункты – данным о старте, оставшиеся 22 строки соответствуют данным с 5 по 16 пункты о первом гелиоцентрическом участке. Далее следует расчет планетоцентрического участка траектории около второй по счету планеты маршрута, в результате чего к этому массиву добавляется еще 4 строки, которые соответствуют пунктам 17–18. Далее начинается расчет гелиоцентрического участка траектории между второй и третьей планетами маршрута, это дает 22 строки аналогичных данных пунктов 5–16. Затем следует расчет планетоцентрического участка около третьей планеты маршрута и так далее. Число строк массива **VTD** в общем случае равно

$$10 + 4(N_p - 2) + 22(N_p - 1) = 26N_p - 20$$

где N_p – число планет в маршруте. В результате перебора параметров, а также проверок отдельных величин на принадлежность допустимым значениям, число виртуальных траекторий массива **VTD** может как расти, так и уменьшаться.

В итоге, после расчета параметров всех $N_p - 1$ гелиоцентрических участков и $N_p - 2$ гравитационных маневров, получаем базу **VTD** виртуальных траекторий. Для каждой виртуальной траектории можно определить общее время полета

$$T = \sum_{n=1}^{N_p-1} T_n$$

и суммарные затраты характеристической скорости

$$\Delta V = \sum_{n=1}^{N_p-1} \Delta v_n.$$

Отметим, что для сложных планетных маршрутов целесообразно задать изначально некоторые разумные ограничения на максимальные значения T и ΔV . В случае их превышения по ходу процедуры построения базы виртуальных траекторий необходимо такие траектории сразу отсеивать. Это позволяет сгладить экспоненциальный рост числа виртуальных траекторий с увеличением числа промежуточных планет в маршруте.

Тот факт, что орбиты планет могут считаться с хорошей точностью неизменными в течение достаточно длительного срока времени, позволяет табулировать базу виртуальных траекторий для каждого планетного маршрута. Таким образом, при проектировании конкретной миссии расчет начинается со второго этапа метода виртуальных траекторий – наложения реального движения планет.

5. Поиск и уточнение виртуальных траекторий в соответствии с реальным движением планет

Процесс наложения реального движения планет в свою очередь также можно разбить на два этапа. Вначале из базы **VTD** виртуальных траекторий отбираются траектории, близкие в некотором смысле к реально реализуемым. Пусть некоторая виртуальная траектория проходит последовательно через N_p узлов на орбитах планет, входящих в выбранный планетный маршрут.

Времена перелета на каждом гелиоцентрическом участке обозначим, как и прежде, через $T_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, N_p - 1$. Если существуют такие времена t_i , $i = 1, \dots, N_p$ прохождения планетами соответствующих узлов, что

$$|t_{i+1} - t_i - T_{i,i+1}| < \Delta t_i, \quad i = 1, \dots, N_p - 1, \quad t \in W,$$

где Δt_i – заранее заданная допустимая величина «временного промаха», W – допустимый интервал дат старта, то данную виртуальную траекторию будем называть приближенной (рис. 4). При движении по двум нижним (зачеркнутым) дугам планета успевает выйти за границы, определяемыми временным промахом Δt_i для данной планеты, и поэтому все виртуальные траектории, содержащие эти дуги, отсеиваются.

Взяв любую виртуальную траекторию из базы **VTD**, можно проверить выполнение указанного выше критерия последовательно для каждой пары смежных узлов, лежащих на этой траектории. При этом используются векторы времен прохождения узлов планетами, содержащиеся в базе данных **PLANETS**. Если хотя бы для одной пары смежных узлов критерий не может быть выполнен, то такая виртуальная траектория отсеивается. В результате имеем массив приближенных виртуальных траекторий.

Второй этап наложения реального движения планет состоит в уточнении полученных приближенных виртуальных траекторий. Рассмотрим пучок приближенных траекторий, проходящих через один и тот же набор узлов. Проведем более подробную дискретизацию орбит планет вблизи узлов из данного набора (рис. 5).

Добавим возникшие таким образом новые узлы к уже имеющимся узлам, через которые проходит пучок приближенных траекторий. Для любого узла из полученного набора узлов известно его положение, а также время, когда соответствующая планета его пройдет. Между каждыми парами найденных узлов на каждом участке «планета-планета» осуществляется построение массива виртуальных траекторий, как это описано выше. Далее полученные траектории корректируются при помощи решения задачи Ламберта на дуге «точка маневра-планета» на каждом

межпланетном участке (рис. 6). Метод решения задачи Ламберта основан на методах, описанных в работах [17, 18] и реализованных D. Izzo в виде open-source алгоритма (см. <https://www.esa.int/gsp/ACT/inf/projects/gtop/gtop.html>).



Рис. 4. Отбор приближенных траекторий.



Рис. 5. Дискретизация орбит планет вблизи узлов приближенных траекторий.



Рис. 6. Уточнение траекторий с помощью решения задачи Ламберта.

Наиболее перспективные в смысле оптимизируемого функционала реальные траектории уточняются итерационно до нужной степени точности: проводится более мелкая дискретизация орбит планет вблизи соответствующих узлов, на каждом из участков «точка маневра-планета» каждого гелиоцентрического участка между всеми парами из новой совокупности узлов находится решение задачи Ламберта и т.д.

6. Время работы метода

Поскольку первый этап предлагаемого алгоритма проектирования траекторий – построение базы виртуальных траекторий – табулируется, логично сделать так, чтобы время, затрачиваемое на вычисления на этом этапе, составляло большую часть от общего времени расчета. Тогда, имея набор баз виртуальных траекторий для основных 10–15 планетных маршрутов полета к планете-цели миссии, можно за сравнительно небольшое время провести приближенное баллистическое проектирование траектории или, другими словами, анализ принципиальной осуществимости этой миссии (mission feasibility study).

Как показали численные эксперименты, достаточно мелкая дискретизация орбит планет и выбор подходящего шага по углу наклона траектории на гелиоцентрических участках гарантируют, что доля времени на первоначальное построение базы виртуальных траекторий будет не меньше 80–90%. На наложение реального движения планет – отсев и уточнение базы виртуальных

траекторий – уходит 10–20% от общего времени расчета (в абсолютных величинах – см. табл. 1). Именно это время нужно брать в качестве оценки быстродействия алгоритма.

Табл. 1. Характерное время работы второго этапа алгоритма (уточнение и отсеив)^{1,2}.

Число гравитационных маневров	Время на второй этап МВТ, минут
1	0.5–1
2	2–5
3	10–25
4	50–100

7. Модельные задачи перелета к Юпитеру

Для демонстрации работы метода рассмотрим задачу проектирования полета к Юпитеру. В качестве целевого функционала, подлежащего минимизации, возьмем величину характеристической скорости, необходимую для выполнения импульсов в глубоком космосе. Для примера рассмотрим два маршрута: Земля–

Земля–Юпитер (ЕЕJ) и Земля–Венера–Земля–Земля–Юпитер (ЕВЕЕJ). Данные маршруты были выбраны с целью сравнения полученных траекторий с траекториями миссий *Juno* [19], *Europa Clipper Mission* [20] и *Europa Jupiter System Mission (Laplace)* [21].

Для построения базы виртуальных траекторий орбиты Венеры, Земли и Юпитера дискретизировались соответственно на 16, 22 и 38 равноотстоящих по истинной аномалии узлов. Это значит, что линейные расстояния между узлами орбиты Венеры равны 44.87 млн км (0.30 а.е.), между узлами орбиты Земли равны 44.87 млн км (0.30 а.е.), и между узлами орбиты Юпитера равны

¹ Абсолютные значения потраченного на расчеты времени получены для процессора Intel Core i7-5500U с тактовой частотой 2.40 ГГц. Все вычисления проводились последовательно на одном ядре. Объем оперативной памяти 8 Гб (в процессе расчетов загрузка, как правило, не превышала 1000 Мб).

² Время, затрачиваемое на отсеив и уточнение базы виртуальных траекторий, может быть различным для одного и того же планетного маршрута в зависимости от требуемой точности финальной траектории и значений параметров дискретизации, используемых при первоначальном построении базы виртуальных траекторий.

143.6 млн км (0.95 а.е.). На дугах, соединяющих узлы планет при движении КА, выбирались 5 равноотстоящих по эксцентрической аномалии узлов, в которых рассчитывались импульсы в глубоком космосе.

Ограничения на затраты характеристической скорости были следующими: 5 км/с для маршрута ЕЕЕ и 1 км/с для маршрута ЕВЕЕЕ. Гиперболический избыток скорости при старте с Земли в маршруте ЕЕЕ варьировался в интервале от 5.5 км/с до 6.5 км/с с шагом 0.1 км/с. Траектории для маршрута ЕВЕЕЕ строились с конца: это позволило уже на раннем этапе расчетов отсеять значительное количество траекторий с большими затратами характеристической скорости на участке Земля–Юпитер. Гиперболический избыток скорости у Юпитера при этом варьировался в интервале от 5.0 до 6.0 км/с с шагом 0.1 км/с.

Для маршрута ЕЕЕ было найдено 2760534 траекторий. Для маршрута ЕВЕЕЕ было построено 5083640 виртуальных траекторий.

В качестве минимально допустимого с точки зрения безопасности расстояния до поверхности планеты при выполнении гравитационного маневра были для определенности взяты следующие значения: Венера – 250 км (верхняя граница атмосферы), Земля – 600 км.

Уточнение траекторий продолжалось до тех пор, пока расстояние между соседними узлами планет не становилось меньше 100 000 км.

7.1. Маршрут ЕЕЕ

Для маршрута Земля–Земля–Юпитер в интервале дат старта от 01.VII.2011 до 01.IX.2011 было найдено 2185 приближенных траекторий. В результате уточнения наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 88.8$ м/с получаются для траектории с датой старта 15.VIII.2011 и временем перелета $T = 4.65$ лет (рис. 7). Гравитационный маневр у Земли выполняется 12.X.2013. Затраты на маневры в глубоком космосе на участке Земля–Земля составляют 88.7 м/с, а на участке Земля–Юпитер – 0.1 м/с. Космический аппарат достигает Юпитера 07.IV.2016. Полученная траектория похожа на траекторию миссии *Juno* космического агентства

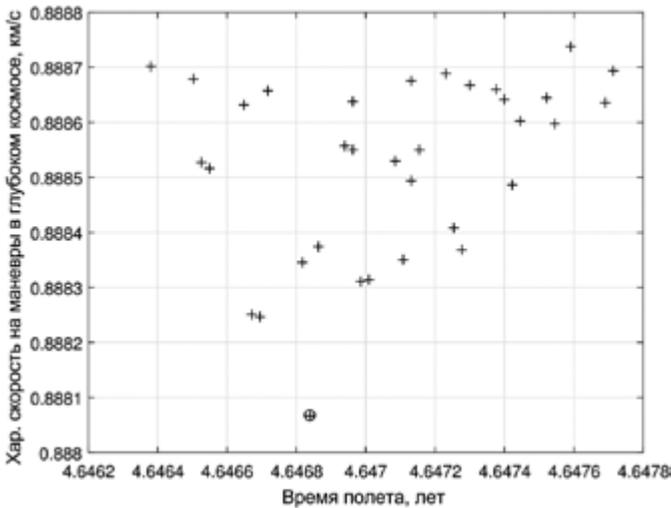


Рис. 7. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EEJ

Табл. 2. Сравнение основных параметров траектории миссии *Juno* и траектории, найденной МВТ, в задаче перелета к Юпитеру вдоль маршрута EEJ.

	<i>Juno</i>	МВТ
Дата старта	05.VIII.2011	15.VIII.2011
Пролет Земли	09.X.2013	12.X.2013
Подлет к Юпитеру	05.VII.2016	07.IV.2016
Δv на участке EE, м/с	730	88.7
Δv на участке EJ, м/с	0	0.1
Гип. избыток скорости при старте, км/с	5.50	5.50
Гип. избыток скорости около Юпитера, км/с	5.46	5.58
Длительность полета, лет	4.92	4.65

NASA, их параметры сравниваются в табл. 2. Затраты характеристической скорости в миссии *Juno* превосходят значения, полученные МВТ. Связано это с небаллистическими особенностями проектирования миссии, такими как требование обеспечить отсутствие соединения с Солнцем в момент маневра и требование на ориентацию бортовой антенны. Траектория аппарата, полученная методом виртуальных траекторий, изображена на рис. 8.



Рис. 8. Оптимальная траектория на маршруте ЕЕЕ с датой старта в диапазоне 01.VII.2011–01.IX.2011.

7.2. Маршрут EVEEJ

Для маршрута Земля–Венера–Земля–Земля–Юпитер были найдены две оптимальные по затратам характеристической скорости траектории, отвечающие различным датам прилета на Юпитер: в интервале 01.I.2028–01.I.2029 для первой траектории и 01.I.2026–01.I.2027 годы для второй траектории.

Первая траектория требует затрат характеристической скорости $\Delta V = 65.1$ м/с, имеет дату старта 29.XII.2021 и время перелета $T = 6.28$ лет (см. рис. 9). При этом маневр у Венеры выполняется 21.V.2022 года, далее у Земли – 25.X.2023 года, затем снова у Земли 26.X.2025 года. Дата прибытия на Юпитер равна 08.IV.2028 года. Отметим, что похожая траектория была найдена для перспективной европейской миссии *Europa Clipper Mission*. Для сравнения параметры траекторий приведены в табл. 3. Отметим, что затраты характеристической скорости на участке EV в миссии *Europa Clipper Mission* зависят от даты маневра и лежат в пределах от 0 до 100 м/с. Кроме того, так как траектории вдоль маршрута EVEEJ проектировались с конца, гиперболический избыток скорости у Земли не контролировался и оказался выше,

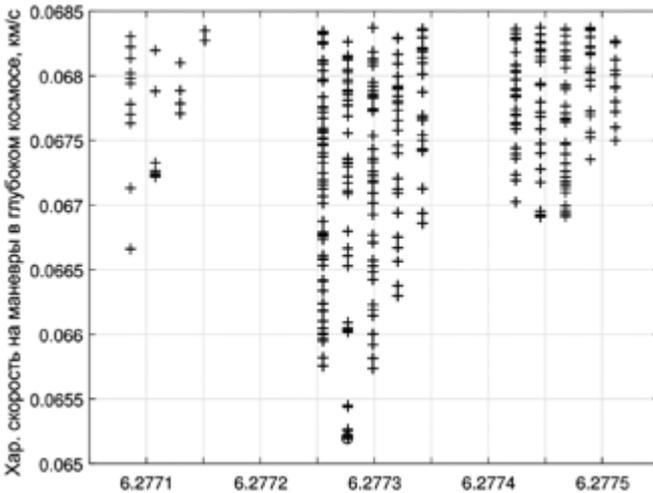


Рис. 9. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EVEEJ с датой прилета в диапазоне 01.I.2028–01.I.2029.

Табл. 3. Сравнение основных параметров найденной MBT и запланированной миссией Europa Clipper Mission траекторий к Юпитеру вдоль маршрута EVEEJ.

	<i>Europa Clipper</i>	MBT
Дата старта	24.XI.2021	29.XII.2021
Пролет Венеры	14.V.2022	21.V.2022
Первый пролет Земли	24.X.2023	25.X.2023
Второй пролет Земли	24.X.2025	26.X.2025
Подлет к Юпитеру	04.IV.2028	08.IV.2028
на участке EV, м/с	0-100	0
на участке VE, м/с	0	65.0
на участке EE, м/с	0	0
на участке EJ, м/с	0	0.1
Гип. избыток скорости при старте, км/с	3.77	5.20
Гип. избыток скорости около Юпитера, км/с	5.75	5.75
Длительность полета, лет	6.36	6.28

чем у траектории *Europa Clipper Mission*. Траектория, полученная методом виртуальных траекторий, изображена на рис. 10 и 11.

Проектирование межпланетных перелетов с несколькими гравитационными маневрами и промежуточными импульсами

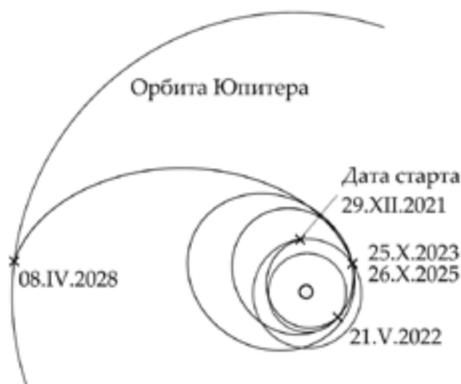


Рис. 10. Оптимальная траектория на маршруте EVEEJ с датой прилета в диапазоне 01.I.2028–01.I.2029.



Рис. 11. Участок EVEEJ оптимальной траектории маршрута EVEEJ с датой прилета в диапазоне 01.I.2028–01.I.2029.

Вторая траектория требует затраты характеристической скорости $\Delta V = 15.8$ м/с. Дата старта – 11.III.2020 года, время перелета $T = 5.90$ лет (рис. 12). При этом маневр у Венеры выполняется 27.VI.2020 года, далее у Земли – 26.IV.2021 года, затем 28.VII.2023 года. Затраты на маневры в глубоком космосе приходятся только на участок Земля–Земля. Космический аппарат достигает Юпитера 05.II.2026 года. Отметим также, что полученная траектория схожа с запланированной в космической программе *Europa Jupiter System Mission* (миссия *Laplace*) космических агентств NASA, ESA, Роскосмос и JAXA для исследования лун Юпитера – Европы и Ганимеда – и магнитосферы Юпитера,

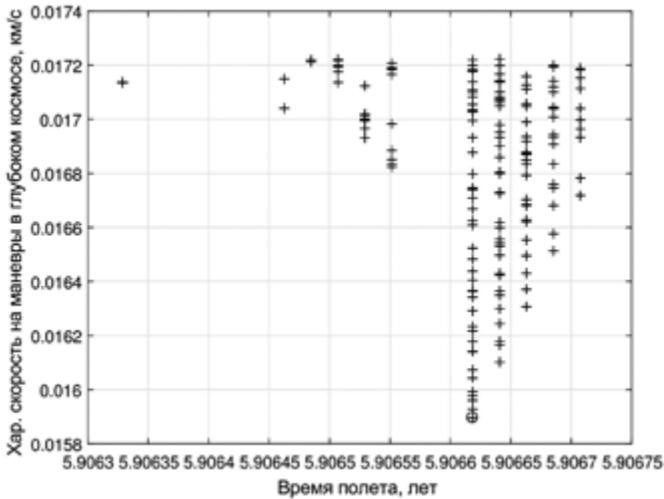


Рис. 12. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EVEEJ с датой прилета в диапазоне 01.I.2026–01.I.2027.

Табл. 4. Сравнение основных параметров найденной MBT и запланированной миссии Laplace траекторий к Юпитеру вдоль маршрута EVEEJ.

	<i>Laplace</i>	MBT
Дата старта	11.III.2020	11.III.2020
Пролет Венеры	01.VII.2020	27.VI.2020
Первый пролет Земли	27.IV.2021	26.IV.2021
Второй пролет Земли	28.VII.2023	28.VII.2023
Подлет к Юпитеру	04.II.2026	05.II.2026
на участке EV, м/с	0	0.1
на участке VE, м/с	0	0.2
на участке EE, м/с	39	15.5
на участке EJ, м/с	0	0
Гип. избыток скорости при старте, км/с	3.39	3.47
Гип. избыток скорости около Юпитера, км/с	5.60	5.60
Длительность полета, лет	5.9	5.9

см. табл. 4. Траектория, полученная методом виртуальных траекторий, изображена на рис. 13 и рис. 14.

Проектирование межпланетных перелетов с несколькими гравитационными маневрами и промежуточными импульсами



Рис. 13. Оптимальная траектория на маршруте EVEEJ с датой прилета в диапазоне 01.I.2026–01.I.2027.



Рис. 14. Участок EVEE оптимальной траектории маршрута EVEEJ с датой прилета в диапазоне 01.I.2026–01.I.2027.

Заключение

Разработан метод виртуальных траекторий, который может быть с успехом использован при проектировании сложных межпланетных траекторий, включающих несколько пассивных гравитационных маневров и импульсов в глубоком космосе. Являясь по сути разновидностью классического метода полного перебора, метод виртуальных траекторий отличается от него пространственной, а не временной привязкой к движению планет. Тот факт, что орбиты планет могут считаться с хорошей точностью неизменными в течение достаточно длительного срока времени (для целей проектирования траекторий – десятки лет), позволяет табулировать для каждого планетного маршрута наиболее ресурсоемкую часть расчетов – построение базы виртуальных траекторий – и тем самым существенно сократить время работы алгоритма оптимизации. Имея набор баз виртуальных траекторий для основных 10–15 планетных маршрутов полета к планете–цели миссии, можно за сравнительно небольшое время провести анализ принципиальной осуществимости этой миссии.

Применение предлагаемой адаптации метода виртуальных траекторий продемонстрировано на примере задач полета к Юпитеру. Как результат, были обнаружены резонансные траектории, позволяющие существенно сократить затраты топлива на гравитационные маневры. Найденные на заданные интервалы старта и прилета траектории оказались схожими с траекториями миссий *Juno*, *Europa Clipper* и *Laplace*. Отметим, что траектории типа *Europa Clipper* и *Laplace* получаются в результате отбора и уточнения траекторий из одной и той же базы виртуальных траекторий.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект 14-11-00621).

Список литературы

1. *Di Lizia P., Radice G., Izzo D., Vasile M.* On the solution of interplanetary trajectory design problems by global optimisation methods // Proc. Global Optimisation Workshop. Armenia. Spain. 2005. P. 159–164.
2. *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета. – М.: Наука, 1990.
3. *Левантовский В.И.* Механика космического полета в элементарном изложении. – М.: Наука, 1980.
4. *Hughes G., McInnes C.R.* Solar Sail Hybrid Trajectory Optimisation // Advances in the Astronautical Sciences. 2001. V. 109. P. 2369–2380.
5. *Rogata P., Di Sotto E., Graziano M., Graziani F.* Guess value for interplanetary transfer design through genetic algorithms // Proc. 13th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. AAS 03-140. Ponce, Puerto Rico, 2003.
6. *Dachwald B.* Optimization of solar sail interplanetary trajectories using evolutionary neurocontrol // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2004. V. 27. № 1. P. 66–72.
7. *Wirthman D.J., Park S.Y., Vadali S.R.* Trajectory optimization using parallel shooting method on parallel computer // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1995. V. 18. № 2. P. 377–379.
8. *Hartmann J.W., Coverstone-Carroll V.L., Williams S.N.* Optimal interplanetary spacecraft trajectories via a Pareto genetic algorithm // J. Astronautical Sciences. 1998. V. 46. № 3. P. 267–282.
9. *Vasile M.* A global approach to optimal space trajectory design // Advances in the Astronautical Sciences. 2003. V. 114. P. 621–640.
10. *Sentinella M.R.* Comparison and integrated use of differential evolution and genetic algorithms for space trajectory optimisation // Proc. IEEE Congress on Evolutionary Computation. Singapore, Singapore, 2007.
11. *Storn R.M., Price K.V.* Differential evolution – A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // J. Global Optimization. 1997. V. 11. P. 341–359.
12. *Storn R.M., Price K.V., Lampinen J.A.* Differential evolution: a practical approach to global optimization // Natural computing series / Ed. by Rozenberg G. Springer, Berlin, 2005.
13. *Kennedy J., Eberhart R.* Particle swarm optimization // Proc. IEEE International Conference on Neural Networks. Perth, Australia, 1995.
14. *Федотов Г.Г.* Оптимизация траекторий полета КА с ЭРД при использовании гравитационного маневра // Космич. исслед. 2004. Т. 42. № 4. С. 404–413. (Cosmic Research. P. 389).

15. Григорьев И.С., Григорьев К.Г. Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги. I // Космич. исслед. 2007. Т. 45. № 4. С. 358–366. (Cosmic Research. P. 339).
16. Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космич. исслед. 2008. Т. 46. № 3. С. 224–237. (Cosmic Research. P. 219).
17. Lancaster E.R., Blanchard R.C. A unified form of Lambert's theorem // NASA technical note. TN D-5368. 1969.
18. Gooding R.H. A procedure for the solution of Lambert's orbital boundary-value problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1990. V. 48. № 2. P. 145–165.
19. Kowalkowski T.D., Johannesen J.R., Lam T. Launch Period Development for the Juno Mission to Jupiter // Proc. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. AIAA 2008-7369. Honolulu, Hawaii, 2008.
20. Buffington B. Trajectory design for the Europa Clipper mission concept // Proc. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. AIAA 2014-4105. San Diego, CA, 2014.
21. Boutonnet A., Schoenmaekers J. JUICE: Consolidated Report on Mission Analysis (CReMA) // ESA. 2012. Reference WP-578, Issue 1, 2012-05-29

Отделение математических наук

М.Г. Ширококов, С.П. Трофимов

**Проектирование межпланетных перелетов
с несколькими гравитационными маневрами
и промежуточными импульсами**

Формат 60 x 84/16
Гарнитура Таймс
Усл. печ. л. 2,1. Усл. изд. л. 1,05
Тираж 20 экз.

Издатель – Российская академия наук

Подготовлено к печати
Управлением научно-издательской деятельности РАН

Отпечатано на оборудовании Управления делами РАН

Издано в авторской редакции

Издается в соответствии с распоряжением
президиума Российской академии наук
от 24 октября 2017 г. №10106-765,
распространяется бесплатно.