К сс

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Процесс в сложных экономических экологических системах

УДК 519.86

МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ МОЩНОСТИ И ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ ОТРАСЛИ ХОЗЯЙСТВА

Н. Н. Оленев, А. А. Петроз, И. Г. Госпелов

Производственным функциям, представимым распределением производственных мощностей по используемым в отрасли технологиям, посвящена обширная литература. В работе [1] разбираются методы построения таких функций и приложения их к эмпирическому анализу производственных возможностей и структуры конкретных отраслей хозяйства. В [2] обоснована необходимость строить агрегированное описание процесса производства (в виде производственной функции) на основе его микроописания. Работы [3, 4] посвящены общей теории агрегирования производственных функций, представимых распределениями. В [5—7] построенные на основе микроописания производственные функции использовались при моделировании развивающейся экономической системы классического рыночного типа. Формулировка гипотез о внутренней структуре производственной единицы и об экономических механизмах, управляющих производственной системой, указывает границы применимости получаемых моделей.

Производственная единица характеризуется производственной мощностью — максимально возможным выпуском продукта в единицу времени и используемой технологией — набором норм затрат производственных факторов на единицу продукта. При заданной технологии мощность определяется количеством основных фондов, имеющихся у производственной единицы. В работе [8] рассмотрена динамическая модель экономики с производственными фондами, дифференцированными по моментам их создания, и учтена возможность частичной превращаемости устаревших фондов в новые мощности. В [9] исследовалась глобальная модель экономики с такими же дифференцированными по моментам создания фондами, в которой учтен экзогенный научно-технический прогресс, а также процессы освоения и выбытия фондов. В этой работе суммарный выпуск продукции в каждый момент времени определялся как максимально возможный при свободном перераспределении трудовых ресурсов между имеющимися фондами.

Предлагаемая работа посвящена более детальному исследованию процесса изменения производственных мощностей. При этом строится новый класс производственных функций, содержащих среди параметров норму выбытия мощностей вследствие износа производственных фондов и среднюю величину темпа роста мощностей.

1. Описание процесса старения производственных фондов и динамики производственных мощностей

Рассмотрим хозяйство, в котором производится единственный однородный продукт — национальный доход и затрачивается единственный однородный ресурс — живой труд [5]. Производство осуществляется совокупностью производственных единиц. Технология производства полностью определяется трудоемкостью — нормой затрат труда на выпуск единицы продукта [2, 5—7].

В работах [2, 5—7] считалось, что трудоемкость единицы продукта не зависит от срока службы производственной мощности, т. е. что выбытие мощностей сопровождается соответствующим сокращением числа рабочих мест. В реальной экономике старение производственных фондов на отдельных предприятиях не сопровождается эквивалентным сокращением рабочих мест. По мере старения оборудование все чаще работает с перебоями, часть людей занята ремонтом, а другая часть вынуждена простаивать. В настоящей работе использована следующая гипотеза о характере процесса износа оборудования.

Гипотеза А. Число рабочих мест на данной производственной единице с течением времени остается неизменным, а выпуск продукции уменьшается с постоянным темпом [1] μ.

Чтобы формально описать сделанное предположение, нужно задать момент создания τ_i каждой производственной единицы Π_i, начальную (номинальную) трудоемкость ν_i и начальную мощность I_i ($I_i > 0$, $-\infty < \tau_i < +\infty$, $0 < \nu_i < +\infty$). В силу гипотезы А в момент $t \geqslant \tau_i$ мощность Π_i уменьшится до величины $m_i(t) = I_i \times \exp[-\mu(t-\tau_i)]$. Число рабочих мест на Π_i равно $r_i(t) = \nu_i I_i = \nu_i \exp[\mu(t-\tau_i)]\, m_i(t)$. Оказывается, что трудоемкость производства единицы продукта в момент t на Π_i больше номинальной: $\lambda_i(t) = \nu_i \exp[\mu(t-\tau_i)]$.

Для макроэкономического описания отрасли важно знать суммарную мощность совокупности производственных единиц. Зафиксируем момент времени t и рассмотрим совокупность производственных единиц, начальные трудоемкости ν_i и моменты создания $\tau_i \leqslant t$ которых принадлежат некоторому множеству H: $(\tau_i, \nu_i) \in H \subseteq (-\infty, t] \times (0, \infty)$. Тогда в силу гипотезы А суммарная мощность рассматриваемой совокупности производственных единиц $M^0(t, H)$ и суммарное число рабочих мест на них $R^0(t, H)$ выражаются в виде

$$M^0(t, H) = \sum_{\{i\}} I_i \exp[-\mu(t-\tau_i)], \quad R^0(t, H) = \sum_{\{i\}} \nu_i I_i, \tag{1.1}$$

где суммирование производится по тем номерам i, для которых $(\tau_i, \nu_i) \in H$.

Изменяя H в (1.1), можно узнать, как распределены мощности производственных единиц и число рабочих мест в пространстве параметров τ, ν. Часто эти распределения удобно аппроксимировать непрерывными функциями плотностей. Чтобы охватить единым образом все случаи дискретного и непрерывного описания, естественно использовать аппарат теории меры [10, 11].

Будем рассматривать величину $I^0(H)$ суммарной начальной мощности производственных единиц, начальные трудоемкости ν_i и мо-

[1] А. А. Шананин показал, что такой процесс износа соответствует случайному процессу поломок и ремонта оборудования с медленно нарастающей частотой поломок.

менты создания τ_i которых принадлежат H, как меру на пространстве $\{(\tau, \nu)\} = (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$. Интеграл по этой мере от функции $\varphi(\tau, \nu)$ по множеству H будем обозначать $\int_H \varphi(\tau, \nu) I^0(d\tau\, d\nu)$. Тогда в соответствии с определениями теории меры выражения (1.1) принимают вид

$$M^0(t, H) = \int_H \exp[-\mu(t-\tau)]\, I^0(d\tau\, d\nu), \quad R^0(t, H) = \int_H \nu I^0(d\tau\, d\nu). \tag{1.2}$$

Соотношения (1.2) являются формальным выражением гипотезы А в общем случае [2]. Эти соотношения мы и примем за определение динамики мощности и числа рабочих мест.

Напомним, что выражения (1.1) являются частным случаем (1.2). В качестве I^0 при этом надо брать атомическую меру $I^0 = \sum_i I_i \delta_{(\tau_i, \nu_i)}$, т. е. сумму мер $\delta_{(\tau, \nu)}$, сосредоточенных в точках (τ, ν) [10].

Если, напротив, считать, что производственные единицы с начальной трудоемкостью из малого интервала $[\nu, \nu + \Delta\nu]$ создаются непрерывно со скоростью $i(\tau, \nu)\,\Delta\nu$, т. е. мера I^0 имеет плотность $i(\tau, \nu)$, то соотношения (1.2) принимают вид

$$M^0(t, H) = \iint_H d\tau\, d\nu \exp[-\mu(t-\tau)]\, i(\tau, \nu),$$
$$R^0(t, H) = \iint_H d\tau\, d\nu \nu i(\tau, \nu). \tag{1.3}$$

В этом случае меры M^0 и R^0 также имеют плотности $\exp[-\mu(t-\tau)]i(\tau, \nu)$ и $\nu i(\tau, \nu)$ соответственно.

Из (1.2) следует, что мера R^0 абсолютно непрерывна относительно M^0:

$$R^0(t, H) = \int_H \nu \exp[\mu(t-\tau)]\, M^0(t, d\tau\, d\nu). \tag{1.4}$$

По существу это означает, что плотность (обычная или обобщенная) меры R^0 пропорциональна плотности меры M^0. Коэффициент пропорциональности

$$\lambda(t, \tau, \nu) = \nu \exp[\mu(t-\tau)], \tag{1.5}$$

как и в случае одной производственной единицы, выражает трудоемкость производства в момент t производственной мощности с параметрами (τ, ν).

Чтобы построить производственную функцию в соответствии с методикой [2], нужно задать суммарную мощность $M(t, \Lambda)$ производственных единиц, трудоемкости которых в момент t принадлежат множеству $\Lambda \subset \{\lambda\} = (0, +\infty)$. В силу (1.5) $M(t, \Lambda)$ выражается

[2] Меры M^0 и R^0 определены на пространстве $(-\infty, t) \times (0, +\infty)$. Поэтому в (1.1), (1.2) множество H надо брать из этого интервала.

через M^0 в виде [3]

$$M(t, \Lambda) = M^0(t, L_t^{-1}(\Lambda)) = \int_{L_t^{-1}(\Lambda)} \exp[-\mu(t-\tau)]\, I^0(d\tau\, d\nu), \tag{1.6}$$

где $L_t^{-1}(\Lambda)$ — прообраз множества Λ при отображении L_t: $\{(\tau, \nu)\} \to \{\lambda\}$, $L_t(\tau, \nu) = \nu \exp[\mu(t-\tau)]$. Для соответствующего числа рабочих мест $R(t, \Lambda)$ из (1.4), (1.6) следует выражение (см. [10])

$$R(t, \Lambda) = \int_\Lambda \lambda M(t, d\lambda). \tag{1.7}$$

Меры $M(t, \Lambda)$ и $R(t, \Lambda)$ полностью определяются своими значениями на отрезках $\Lambda = [0, \lambda]$, поэтому в дальнейшем будем вычислять их только для отрезков и обозначать $M(t, \lambda) = M(t, [0, \lambda])$, $R(t, \lambda) = R(t, [0, \lambda])$.

Формуле (1.6) можно придать более конкретный вид, если сделать конкретные предположения о процессе создания новых мощностей. Рассмотрим примеры.

Допустим, что мера I^0 имеет непрерывную плотность $i(\tau, \nu)$ (см. (1.3)), т. е.

$$\int_H \varphi(\tau, \nu) I^0(d\tau\, d\nu) = \iint_H d\tau\, d\nu \varphi(\tau, \nu)\, i(\tau, \nu). \tag{1.8}$$

Для $\Lambda = [0, \lambda]$ имеем $L_t^{-1}(\Lambda) = \{(\tau, \nu): \nu \exp[\mu(t-\tau)] \leqslant \lambda\}$ и в силу (1.6), (1.8)

$$M(t, \Lambda) = M(t, \lambda) = \iint_{\nu \exp[\mu(t-\tau)] \leqslant \lambda} d\tau\, d\nu \exp[-\mu(t-\tau)]\, i(\tau, \nu). \tag{1.9}$$

Переходя от двойного интеграла (1.9) к повторному и производя замену переменной $\xi = \nu \exp[\mu(t-\tau)]$, получим

$$M(t, \lambda) = \int_{\infty}^{t} d\tau \int_0^{\lambda} d\xi \exp[-2\mu(t-\tau)]\, i(\tau, \xi \exp[-\mu(t-\tau)])$$
$$= \int_0^{\lambda} d\xi \int_{-\infty}^{t} d\tau \exp[-2\mu(t-\tau)]\, i(\tau, \xi \exp[-\mu(t-\tau)]).$$

Следовательно,

$$M(t, \lambda) = \int_0^{\lambda} d\xi\, m(t, \xi). \tag{1.10}$$

Плотность распределения мощностей по шкале трудоемкостей в момент t представляется в виде

$$m(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \exp[-2\mu(t-\tau)]\, i(\tau, \lambda \exp[-\mu(t-\tau)]). \tag{1.11}$$

[3] Переход от меры M^0 к мере M аналогичен переходу от переменных Лагранжа к переменным Эйлера в механике сплошных сред.

Если считать, что плотность $i(t, \lambda)$ дифференцируема по λ, то из (1.11) следует, что плотность $m(t, \lambda)$ дифференцируема по t и по λ и удовлетворяет уравнению

$$\partial m/\partial t = i(t, \lambda) - 2\mu m(t, \lambda) - \mu\lambda \partial m/\partial\lambda. \quad (1.12)$$

Это уравнение однозначно определит плотность $m(t, \lambda)$, если задано начальное условие $m(t_0, \lambda) = m_0(\lambda)$.

Следующий пример для нас особенно важен, так как будет использоваться в дальнейшем. Будем описывать процесс создания новых мощностей так же, как в [2, 5—7], а именно предположим, что в момент t неизвестны технологии с трудоемкостью меньше некоторой величины $\nu(t) > 0$, эта величина характеризует в модели технический уровень производства. Предполагается, что она дифференцируема и не возрастает со временем. (Например, в следующем разделе будем считать, что темп роста $1/\nu(t)$ пропорционален доле накопления в национальном доходе.) В рамках модели технология с трудоемкостью $\nu(t)$ — наилучшая в момент t, поэтому естественно считать [6], что все новые мощности имеют трудоемкость $\nu(t)$. Предположим еще, что новые мощности создаются непрерывно со скоростью $I(t)$. Сделанные предположения означают, что мера $I^0(H)$ имеет вид [4]

$$I^0(H) = \int_{T(H)} I(\tau)\, d\tau, \quad T(H) = \{\tau: (\tau, \nu(\tau)) \in H\}, \quad (1.13)$$

а интеграл от функции $\varphi(\tau, \nu)$ по этой мере

$$\int_H \varphi(\tau, \nu)\, I^0(d\tau\, d\nu) = \int_{T(H)} d\tau \varphi(\tau, \nu(\tau))\, I(\tau). \quad (1.14)$$

Вычислим $M(t, \lambda)$ при условии, что I^0 задано выражением (1.13). Если $\Lambda = [0, \lambda]$, то

$$H = L_t^{-1}(\Lambda) = \{(\tau, \nu): \nu \exp[\mu(t - \tau)] \leqslant \lambda, \quad \tau \leqslant t\}$$

и

$$T(H) = \{\tau: \nu(\tau) \exp[\mu(t - \tau)] \leqslant \lambda\}.$$

Так как $\nu(\tau)$ не возрастает, то $T(H)$ представляет собой отрезок $[t - \theta(t, \lambda), t]$, причем функция θ определяется равенством

$$\nu(t - \theta(t, \lambda)) \exp[\mu\theta(t, \lambda)] = \lambda \quad (1.15)$$

и имеет смысл срока функционирования производственной мощности с трудоемкостью λ в момент времени t. Заметим, что $T(H) = \emptyset$, если $\theta(t, \lambda) < 0$, т. е. $\lambda < \nu(t)$. Используя выражение для $T(H)$ и соотношения (1.6) и (1.13), получаем

$$M(t, \lambda) = \int_{t-\theta(t, \lambda)}^{t} d\tau \exp[-\mu(t - \tau)]\, I(\tau)$$

$$(M = 0, \text{ если } \lambda < \nu(t)). \quad (1.16)$$

[1] Заметим, что эта мера не дискретна, не непрерывна — она сосредоточена на кривой. Ее обобщенную плотность можно формально записать как $I(\tau)\,\delta(\nu - \nu(\tau))$, где δ — функция Дирака.

Из (1.7), (1.15), (1.16) можно получить выражение для числа рабочих мест

$$R(t, \lambda) = R(t, [0, \lambda]) = \int_{t-\theta(t, \lambda)}^{t} d\tau\, \nu(\tau)\, I(\tau). \quad (1.17)$$

Смысл этого выражения вполне понятен, если вспомнить, что число рабочих мест на производственных единицах со временем не меняется.

Формулы (1.15), (1.16) показывают, что θ и M дифференцируемы по t и λ. Исключая θ из (1.15), (1.16) с помощью дифференцирования этих соотношений по t и по λ при $\lambda > \nu(t)$, получаем уравнение для M:

$$\partial M/\partial t = -\mu M(t, \lambda) + I(t) - \mu\lambda \partial M/\partial\lambda. \quad (1.18)$$

Производная $\partial M/\partial\lambda = m(t, \lambda)$ — это плотность меры M. Дифференцируя (1.18) по λ, получаем уравнение для плотности распределения мощностей по шкале трудоемкости $m(t, \lambda)$:

$$\partial m/\partial t = -2\mu m(t, \lambda) - \mu\lambda \partial m/\partial\lambda. \quad (1.19)$$

Это уравнение верно при $\lambda > \nu(t)$, а при $\lambda < \nu(t)$ величина $m(t, \lambda) = 0$. Из (1.15), (1.16) для этого уравнения легко получить граничное условие [5]

$$m(t, \nu(t) + 0) = I(t)/(\mu\nu(t) - d\nu/dt). \quad (1.20)$$

Чтобы определить величину m по (1.19), (1.20), не обязательно знать всю предысторию изменения распределения мощностей. Достаточно знать распределение их в какой-то момент t_0 (начальное условие): $m(t_0, \lambda) = m_0(\lambda)$, $m_0(\lambda) = 0$ при $\lambda < \nu(t_0)$.

Естественно считать функции $\nu(t)$ и $I(t)$ такими, что полное число рабочих мест в хозяйстве $\bar{R}(t) = \int_0^\infty d\lambda\, \lambda m(t, \lambda)$ (см. (1.7)) конечно. Тогда $\lambda m(t, \lambda) = \lambda \partial M/\partial\lambda \to 0$ при $\lambda \to \infty$, а из (1.18) получается обычное макроэкономическое уравнение [2, 5—7, 12] для полной мощности всех производственных единиц $\bar{M} = M(t, (0, \infty))$:

$$d\bar{M}/dt = I(t) - \mu\bar{M}(t). \quad (1.21)$$

Описанную модель можно несколько обобщить.

Предположим, что существует дифференцируемая функция $\nu^+(t)$, такая, что новые мощности с трудоемкостями $\lambda > \nu^+(t)$ не строятся, а существующие мощности с трудоемкостью $\lambda > \nu^+(t)$ начиная с момента t никогда в дальнейшем не используются в хозяйстве, например демонтируются. Тогда суммарная мощность хозяйства

Заметим, что граничное условие (1.20) можно формально включить в (1.19), добавив слагаемое $I(t)\,\delta(\lambda - \nu(t))$ в правую часть. Тогда (1.19) примет вид, аналогичный (1.12).

имеет вид

$$\overline{M}(t) = \int_{\nu(t)}^{t} d\lambda\, m(t, \lambda). \tag{1.22}$$

Проинтегрировав (1.19) по λ от $\nu(t)$ до $\nu^+(t)$ с учетом (1.20), получим новое уравнение изменения суммарной мощности хозяйства

$$d\overline{M}/dt = I(t) - \mu\overline{M}(t) - (\mu\nu^+(t) - d\nu^+/dt)\, m(t, \nu^+). \tag{1.23}$$

Величина $(\mu\nu^+(t) - d\nu^+/dt)\, m(t, \nu^+)$ выражает скорость демонтирования мощностей. То обстоятельство, что производственная мощность, трудоемкость которой однажды превысила $\nu^+(t)$, в хозяйстве потом не используется, налагает ограничение на функцию

$$d\nu^+/dt \leqslant \mu\nu^+(t). \tag{1.24}$$

Функцию $\nu^+(t)$, а также и $I(t)$ можно рассматривать как один из способов управления величиной производственной мощности.

2. Производственная функция отрасли с учетом старения производственных фондов

Функция плотности распределения мощностей по шкале трудоемкостей $m(t, \lambda)$ нужна, чтобы построить производственную функцию [2], которая задает максимальный выпуск продукта $Y(t)$ в зависимости от количеств производственных факторов. В данном случае этих факторов два: суммарная производственная мощность $\overline{M}(t)$ и число занятых рабочих мест $R(t)$. В [2] показано, что если ввести величины

$$x = R(t)/\overline{M}(t), \quad h(t, \lambda) = m(t, \lambda)/\overline{M}(t), \tag{2.1}$$

то Y, R и $\overline{M}$ будут связаны соотношением

$$Y(t) = \overline{M}(t) f(t, x), \tag{2.2}$$

где

$$f(t, x) = \int_{\nu(t)}^{\xi(t, x)} d\lambda\, h(t, \lambda), \tag{2.3}$$

а $\xi(t, x)$ — решение уравнения

$$x = \int_{\nu(t)}^{\xi(t, x)} d\lambda\, \lambda h(t, \lambda). \tag{2.4}$$

При этом $\xi = +\infty$, если $x > \bar{x} = \bar{R}/\overline{M} = \int_{\nu(t)}^{\infty} d\lambda\, \lambda h(t, \lambda)$. Функция f обладает обычными свойствами:

$$f(t, 0) = 0, \quad \partial f/\partial x > 0, \quad \partial^2 f/\partial x^2 < 0 \tag{2.5}$$

и, кроме того,

$$\partial f/\partial x = 1/\xi(t, x), \quad f(t, x) = 1 \text{ при } x \geqslant \bar{x}(t). \tag{2.6}$$

Формулы (2.2), (2.3) показывают, что Y — это суммарная мощность производственных единиц с трудоемкостью меньше ξ, т. е. это $M(t, \xi)$ в (1.16), а величина $R = x\overline{M}$ совпадает с $R(t, \xi)$ в (1.17). Тогда, используя (1.16), (1.17), (2.1)—(2.4), получаем следующие соотношения:

$$\overline{M}(t) f(t, x) = \int_{t-\theta}^{t} d\tau \exp[-\mu(t - \tau)] I(\tau),$$

$$\overline{M}(t) x = \int_{t-\theta}^{t} d\tau\, \nu(\tau) I(\tau). \tag{2.7}$$

Введем величину $\sigma(t) = I(t)/\overline{M}(t)$ — долю вновь созданных мощностей среди всех существующих — и будем считать, как и в [2], что темп научно-технического прогресса пропорционален этой величине:

$$d\nu/dt = -\varepsilon\nu\sigma \quad (\varepsilon > 0, \ \sigma(t) > 0). \tag{2.8}$$

Тогда $I(\tau) = \sigma(\tau)\overline{M}(\tau)$, $\nu(\tau) = \nu(t) \exp\left[+\varepsilon \int_{\tau}^{t} ds\, \sigma(s)\right]$, а из (1.21) следует, что $\overline{M}(\tau) = \overline{M}(t) \exp\left[-\int_{\tau}^{t} ds\, \sigma(s)\right]$. Подставляя эти выражения в (2.7), получаем параметрическое выражение для производственной функции

$$\begin{aligned} f(t, x) &= 1 - \exp\left[-\int_{t-\theta}^{t} ds\, \sigma(s)\right], \\ (1 - \varepsilon) x &= \mu\nu(t) \int_{t-\theta}^{t} d\tau \exp\left[\mu(t - \tau) - (1 - \varepsilon) \int_{\tau}^{t} ds\, \sigma(s)\right] \\ &\quad + \nu(t)\left\{1 - \exp\left[\mu\theta - (1 - \varepsilon) \int_{t-\theta}^{t} ds\, \sigma(s)\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Параметр $\theta = \theta(t, x)$, входящий в (2.9), имеет простой смысл — это возраст самой старой мощности, которую нужно загрузить, чтобы обеспечить выпуск $\overline{M}(t) f(t, x)$.

Рассмотрим несколько частных случаев из общего представления (2.9). Пусть мощности не стареют, т. е. $\mu = 0$. Тогда выражение (2.9) дает производственную функцию, построенную в [2]:

$$f(t, x) = \begin{cases} 1 - \left[1 - \dfrac{1 - \varepsilon}{\nu(t)} x\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} & 0 \leqslant x < \nu(t)/(1 - \varepsilon), \\ 1 & x \geqslant \nu(t)/(1 - \varepsilon). \end{cases} \tag{2.10}$$

При $\varepsilon = 0$, т. е. при отсутствии научно-технического прогресса, функция (2.10) становится линейной, что соответствует вырожденному распределению мощностей $m(t, \lambda) = m\delta(\lambda - \nu)$.

Пусть теперь $\mu \neq 0$ и $\sigma = \text{const}$. Тогда из выражения (2.9) находим

$$f(t, x) = \begin{cases} \left[1 - \frac{1}{\nu(t)} x\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon-\mu/\sigma}}, \\ 1, \quad x \geqslant \nu(t)/(1-\varepsilon-\mu/\sigma), \ \sigma > \mu. \end{cases} \tag{2.11}$$

Заметим, что здесь тоже можно положить $\varepsilon = 0$, но распределение мощностей по технологиям при отсутствии научно-технического прогресса уже не будет вырожденным [6]:

$$f(x) = \begin{cases} \left[1 - \left(1 - \frac{1-\mu/\sigma}{\nu} x\right)^{\frac{1}{1-\mu/\sigma}}\right. \\ 1, \quad x \geqslant \nu/(1-\mu/\sigma), \quad \sigma > \mu. \end{cases} \tag{2.12}$$

Если относительная величина вновь создаваемых мощностей зависит от времени, то представление (2.11) не будет верным. Однако когда функция $\sigma(t)$ медленно меняется со временем, то можно показать, что выражение (2.11) останется приближенно верным, если в нем использовать текущее значение $\sigma(t)$. Точное утверждение, доказательство которого мы не приводим, состоит в следующем.

Пусть γ — характерная величина темпа роста экономики, а T — характерное время изменения величины $\sigma(t)$, т. е. $\sigma(t)$ имеет вид $\sigma(t) = (\gamma + \mu)\,\tilde{\sigma}(t/T)$. Пусть $\tilde{\sigma}(t/T) > 0$ и $\tilde{\sigma}(t/T) = O(1)$, $\tilde{\sigma}'(t/T) = O(1)$ при $T \to \infty$. Тогда при $\delta \to 0$ и $T\mu > \frac{1}{\delta}\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^3 \frac{\gamma+\mu}{\mu}$ справедливо представление

$$f(t, x) = \left[1 - \frac{1-\varepsilon-\mu/\sigma(t)}{\nu(t)} x\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon-\mu/\sigma(t)}} + O(\delta). \tag{2.13}$$

Полученная производственная функция в явном виде отражает механизмы управления производственной системой, причем x характеризует краткосрочное управление, а σ — долгосрочное управление. Поскольку формула (2.13) носит приближенный характер, нужно исследовать возможности применения этой функции в замкнутых моделях экономики, в частности сравнить траектории модели экономики с производственной функцией (2.13) и траектории модели с точным вычислением выпуска по формулам (2.9).

Поскольку в производственную функцию (2.13) в явном виде входят характеристики предшествующего развития производственной системы, интересно заново рассмотреть классические задачи математической экономики.

В следующих разделах предпринята попытка осуществить эти намерения.

[6] При $\mu = \sigma$ производственная функция превращается в $f_0(x) = 1 - \exp \times$ $\times(-x/\nu)$. При $\sigma \leqslant \mu$ производственная функция (2.12) соответствует распределению мощностей $m(\lambda)$ с бесконечно большим числом рабочих мест.

3. Численные эксперименты с однопродуктовой моделью, учитывающей старение производственных фондов

В работах [2, 5—7] проведен анализ однопродуктовой модели развивающейся экономики классического рыночного типа. Технологическая структура хозяйства в этой модели либо считалась постоянной, либо могла меняться за счет появления новых технологий. Выясним, к каким изменениям в этой модели приводит учет старения производственных мощностей. Важно также выяснить, можно ли использовать асимптотическое выражение (2.13) в замкнутой модели экономики. Чтобы сделать это, возьмем модель, предложенную в [5] (обозначим ее *SB*), и используем в ней производственную функцию (2.9). Такую модель обозначим *S*. Модель с производственной функцией (2.13) обозначим *SF*.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что траектории моделей *S* и *SF* в целом подобны траекториям модели *SB*. В частности, на них можно выделить те же характерные участки:

1) при избытке предложения трудовых ресурсов — участок, близкий к режиму экспоненциального роста, при котором величины M, Y, R, Ф растут с одинаковым постоянным темпом γ, а величины p, s, r, x остаются постоянными;

2) при дефиците предложения трудовых ресурсов — участок, близкий к инфляционному режиму, характеризующемуся постоянством величин M, Y, R, r и пропорциональным линейным ростом величин p, s, Ф.

Модели *S* и *SF*, учитывающие старение производственных фондов, отличаются большей плавностью траекторий на переходных участках и существенно большей областью устойчивости режима сбалансированного роста по начальным данным. Большую степень устойчивости для моделей *S* и *SF* можно объяснить тем, что в модели с переменной технологической структурой существует дополнительная степень свободы — форма распределения производственных мощностей по трудоемкости — и экономический механизм изменяет эту форму в «нужном» для экономики направлении.

Траектории модели *S* близки к траекториям модели *SF*, однако переходные участки и размах колебаний в последней несколько меньше. Более точное сопоставление моделей *S* и *SF* можно провести следующим образом. Функции (2.13) однозначно соответствует эффективное распределение мощности [7], которое имеет вид

$$h(t, \lambda) = \frac{a(t)}{a(t)-1} \frac{\nu^{a(t)/[a(t)-1]}}{\lambda^{[2a(t)-1]/[a(t)-1]}}, \quad \lambda \geqslant \nu, \tag{3.1}$$

где $a(t) = 1/[1 - \mu/\sigma(t)]$.

На рис. 1 представлены истинные и эффективные распределения мощности [8] на различных участках траекторий: в переходный период к сбалансированному росту (кривые *1*, *1'*), в начальный период сба-

[7] Функция (2.13) порождается этим распределением в соответствии с (2.3), (2.4).

[8] На рис. 1 показано распределение h не по параметру λ, а по параметру τ, который связан с λ по формуле $\lambda = \nu \exp[\mu(t - \tau)]$.

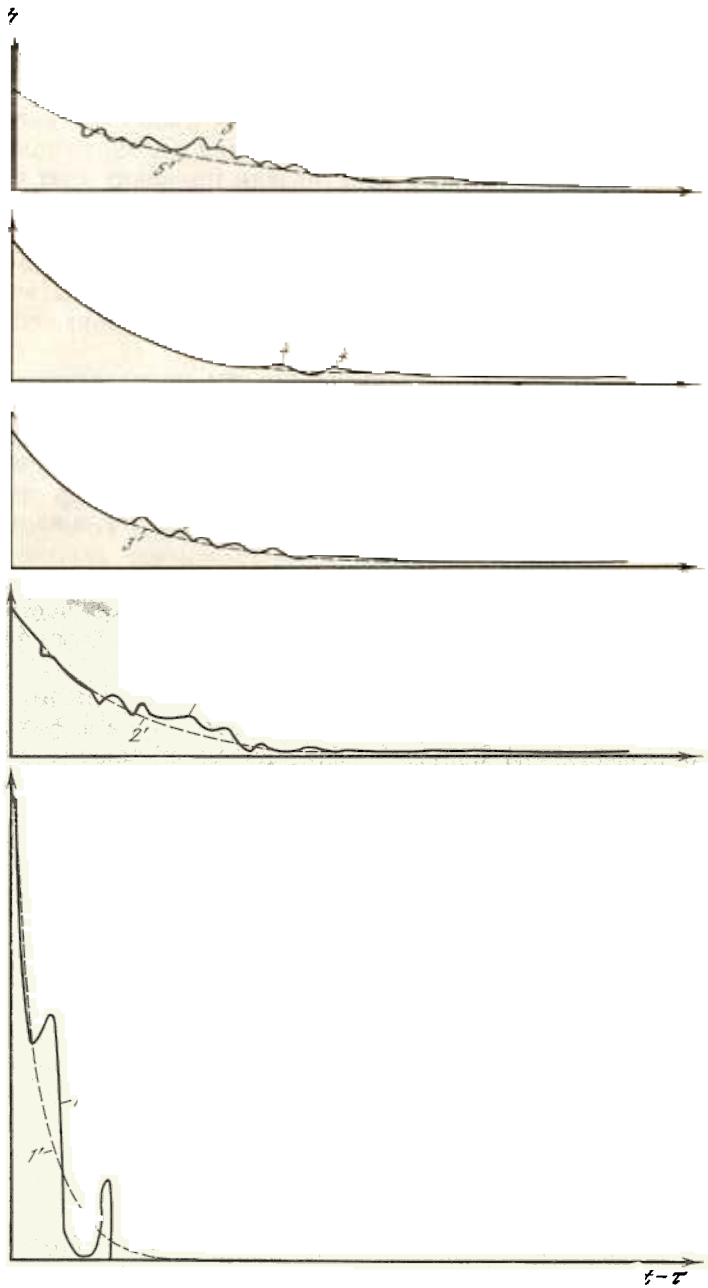

Рис. 1

ансированного роста (кривые 2, 2′), в середине сбалансированного роста (кривые 3, 3′), в конце сбалансированного роста (кривые 4, 4′) и в инфляционном режиме (кривые 5, 5′). Кривые, отмеченные номерами со штрихом, показывают эффективное распределение. Видно, что оба распределения существенно меняются, но остаются близкими одно другому в самой важной области новых производственных единиц. На участке сбалансированного роста, где σ = const, как и следовало ожидать, эффективное и точное распределение производственных мощностей совпадают [9].

4. Задача Р. Солоу с производственной функцией, учитывающей старение производственных фондов

Рассмотрим режимы экспоненциального роста в простейшей модели экономического роста при отсутствии научно-технического прогресса (ε = 0). Производственные мощности изменяются в соответствии с уравнением

$$d\bar{M}/dt = I - \mu\bar{M}. \tag{4.1}$$

Суммарный выпуск продукта $Y(t)$ в соответствии с (2.2) определяется производственной функцией (2.12), которая зависит от двух производственных факторов — суммарной мощности хозяйства $\bar{M}(t)$ и суммарного числа занятых рабочих мест $R(t)$:

$$Y = \bar{M}f(x), \quad f(x) = \left[1 - \left(1 - \frac{\mu}{\nu}\right)x^{\frac{\sigma-\mu}{\sigma}}\right]^{\frac{1}{1-\mu/\sigma}}, \quad x = R/\bar{M}. \tag{4.2}$$

Производимый продукт распределяется на расширение производства и конечное потребление:

$$Y = bI + W. \tag{4.3}$$

Здесь W — объем продукта, идущего на потребление; b — коэффициент приростной фондоемкости. В режимах экспоненциального роста объемные показатели R, $\bar{M}$, I, W увеличиваются с одинаковым постоянным темпом γ:

$$R = R_0e^{\gamma t}, \quad \bar{M} = M_0e^{\gamma t}, \quad I = I_0e^{\gamma t}, \quad W = W_0e^{\gamma t}, \quad x = R_0/M_0. \tag{4.4}$$

Величина $x = R_0/M_0$ остается постоянной.

Из уравнения (4.1) следует, что $\sigma = \gamma + \mu$, а уравнение (4.3) определяет объем потребления на одного занятого:

$$\omega = [f(x, \gamma) - b(\gamma + \mu)]/x. \tag{4.5}$$

Задача Солоу [7, 12] ставится следующим образом: среди всех режимов сбалансированного роста с заданным темпом γ найти такой,

[9] При сравнении приведенных распределений следует учесть, что истинное распределение при $t = 0$ было δ-функцией, т. е. очень сильно отличалось от эффективного.

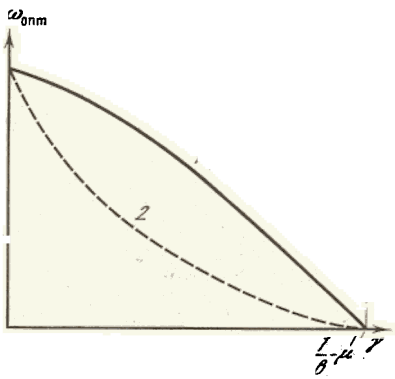

Рис. 2

Рис. 3

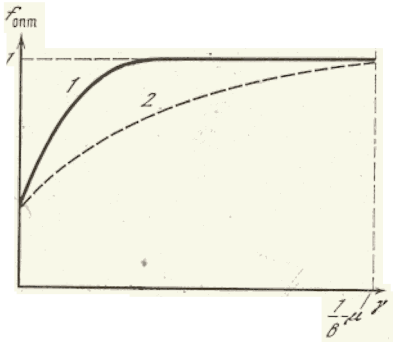

Рис. 4

при котором величина ω максимальна. Если при заданном γ решение x, определяемое из условия $\partial\omega/\partial x = 0$, в силу (4.5) существует и принадлежит интервалу $[0, \bar{x}]$, то величина $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ в силу (2.5) отрицательна и, значит, x доставляет максимум ω. Из условия $\partial\omega/\partial x = 0$ получаем уравнение для определения x:

$$f(x, \gamma) - x\partial f/\partial x - b(\gamma + \mu) = 0.$$

Это соотношение известно в математической экономике под названием «золотого правила роста» Р. Солоу. Если производственная функция имеет вид (4.2), «золотое правило роста» выглядит следующим образом:

$$1 - \left(1 - \frac{1}{1+\mu/\gamma}\frac{x}{\nu}\right)^{\mu/\gamma}\left(1 - \frac{\mu/\gamma}{1+\mu/\gamma}\frac{x}{\nu}\right) - b(\gamma+\mu) = 0. \qquad (4.6)$$

При $x = 0$ левая часть (4.6) отрицательна, а при $x = \bar{x} = \nu(1 + \mu/\gamma)$ она равна $1 - b(\gamma + \mu)$.

Для того чтобы уравнение (4.6) имело решение, достаточно потребовать неотрицательность величины $1 - b(\gamma + \mu)$. Это условие определяет технологический предел темпа роста:

$$\gamma < (1 - \mu b)/b. \qquad (4.7)$$

Из (4.7) заключаем: чтобы темп роста был положителен, надо потребовать выполнение условия продуктивности $1 - \mu b > 0$. Условие

продуктивности означает, что производственная система должна производить продукции не меньше, чем требуется для возмещения потерь мощностей вследствие износа.

Итак, для каждого заданного неотрицательного значения темпа роста γ, удовлетворяющего условию (4.7), найдется значение x, при котором объем потребления на одного занятого максимален ($\omega = \omega_{опт}$). Можно построить зависимость $\omega_{опт}$ от темпа роста γ.

На рис. 2 изображена зависимость от темпа роста производства γ объема потребления на одного занятого $\omega_{опт}$, вычисленная с помощью функции (4.2) (кривая *1*). Кривая *2* — зависимость $\omega_{опт}$ от γ, вычисленная с помощью функции $f_0(x) = 1 - \exp(-x/\nu)$. Она совпадает с функцией (4.2), если положить $\sigma = \mu$, т. е. $\gamma = \sigma - \mu = 0$.

На рис. 2 видно, что сплошная кривая расположена выше пунктирной. Наклон сплошной кривой меньше, чем наклон пунктирной, при малых γ; если же коэффициент γ близок к технологическому пределу, то больше наклон у сплошной кривой. Это объясняется тем, что уменьшение доли потребления W/Y в национальном доходе с ростом γ компенсируется улучшением технологической структуры, которое выражается в увеличении производительности труда $f_{опт}/x_{опт}$ (рис. 3). В обоих случаях норма потребления стремится к нулю с приближением темпа роста γ к технологическому пределу $1/b - \mu$.

Загрузка производственных мощностей $f_{опт}$, рассчитанная с помощью функции (4.2) выше, чем рассчитанная с помощью функции $f_0(x)$ (рис. 4, кривые *1*, *2* соответственно).

Эти предварительные результаты уже показывают, что учет старения производственных мощностей дает возможность построить производственную функцию, лучше отражающую экономическую действительность. Если полную производственную функцию использовать в системном анализе развивающейся экономики, то улучшаются динамические свойства модели экономической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Johansen L.* Production functions. Amsterdam; London: North-Holland, 1972. 274 p.
2. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: к теории производственных функций. I.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1979, № 2, с. 18—27.
3. *Шананин А. А.* К теории производственных функций.— В кн.: Модели и алгоритмы программного метода планирования сложных систем. М.: ВЦ АН СССР, 1979, с. 24—50.
4. *Шананин А. А.* Системный анализ развивающейся экономики: к вопросу об агрегировании производственных функций и функций прибыли.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 4, с. 36—43.
5. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: системный подход и односекторная модель. II.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1979, № 3, с. 28—38.
6. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: учет научно-технического прогресса. IV.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1979, № 5, с. 13—24.
7. *Краснощеков П. С., Петров А. А.* Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ, 1983, с. 182—233.

8. *Канторович Л. В., Жиянов В. И.* Влияние превращаемости фондов и физического износа оборудования на экономическое развитие.— В кн.: Математические модели и статистический анализ научно-технического прогресса. М.: ВНИИСИ, 1982, вып. 8, с. 11—18.
9. *Чуканов С. В.* Об одной динамической модели экономики с фондами, дифференцированными по моментам создания.— В кн.: Модели и методы в прогнозировании научно-технического прогресса. М.: ВНИИСИ, 1984, вып. 2, с. 46—60.
10. *Шварц Л.* Анализ. М.: Мир, 1972. Т. 1. 824 с.
11. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. А.* Интеграл, мера и производная. М.: Наука, 1964. 212 с.
12. *Столерю Л.* Равновесие и экономический рост. М.: Статистика, 1974. 472 с.

УДК 519.86

ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ КАПИТАЛОЕМКОЙ ОТРАСЛИ ХОЗЯЙСТВА

В. В. Кришталь

В работах [1—11] построены и исследованы производственные функции, задающие зависимость выпуска продукта производственной отрасли экономики от затрат природных ресурсов, сырьевых продуктов, труда. При построении этих функций явно учитывается механизм управления производственными единицами отрасли. В принципе, таких механизмов существует много. В упомянутых работах предполагалось, что рентабельные производственные единицы работают на полную мощность, а нерентабельные простаивают. Под рентабельностью понимается превышение выручки от продажи единицы продукции над затратами на ее производство. В [1—11] при определении рентабельности учитывались лишь текущие затраты (оплата сырья и рабочей силы). В то же время существуют капиталоемкие отрасли, такие, как добывающая промышленность, энергетика, транспорт. В текущем финансовом балансе этих отраслей существенную роль играют разного рода платежи и отчисления за основные фонды — амортизационные отчисления, арендные платежи, проценты по долгосрочным займам. Однако для построения производственной функции важно лишь то, что эти платежи пропорциональны затратам на создание производственной единицы, а не выпуску продукции [12].

В настоящей работе предлагается схема построения производственной функции отрасли экономики, учитывающая влияние платежей за основные фонды на выпуск продукции отрасли. Одновременно рассматривается более общая, чем в [1—5, 7—10], модель изменения мощностей и технологических характеристик производственных единиц.

1. Описание изменения производственных мощностей

Рассмотрим отрасль хозяйства, которая выпускает однородный продукт и затрачивает N видов ресурсов. Продукт производится отдельными производственными единицами, использующими различные технологии. Технология на i-й производственной единице характеризуется набором $\nu_i = \{\nu_i^1, \ldots, \nu_i^N\}$, $\nu_i \in R_+^N \subset R^N$, номинальных норм затрат природных ресурсов, сырьевых продуктов и труда (норм затрат факторов производства) на выпуск единицы продукта. Кроме того, производственную единицу с номером i будем характеризовать начальной мощностью I_i, моментом ввода ее в строй τ_i, $\tau_i \in (-\infty, t] \subset R^1$, и темпом физического износа мощности μ (последнюю величину считаем постоянной и одинаковой для всех производственных единиц). Если $m_i(t)$ — мощность i-й производственной единицы в момент $t \geqslant \tau$, то

$$dm_i/dt = -\mu m_i, \quad m_i(\tau_i) = I_i. \tag{1.1}$$

В работах [7—10] предполагалось, что фактические нормы затрат производственных единиц всегда равны номинальным значениям ν_i. Старение производственной единицы сводилось лишь к уменьшению мощности (1.1). На самом деле технологические характеристики производственной единицы с течением времени изменяются по сравнению с номинальными значениями.

Учтем, что по мере старения производственной единицы изменяются нормы затрат. Для простоты будем считать, что изменяются они по единому закону, т. е. фактические затраты j-го ресурса на i-й производственной единице зависят только от возраста производственной единицы $t - \tau_i$ и начальных затрат ν_i. Обозначим эту зависимость через $\lambda^j(t - \tau, \nu)$, при этом, очевидно, $\lambda^j(0, \nu_i) = \nu_i^j$. В дальнейшем будем считать, что вектор-функция $\lambda(t - \tau, \nu) = \{\lambda^j(t - \tau, \nu)\}$, $j = 1, \ldots, N$, является решением задачи Коши

$$\partial\lambda/\partial t = \varphi(\lambda), \quad t \geqslant 0, \quad \lambda(0, \nu) = \nu, \tag{1.2}$$

а функция φ одинакова для всех производственных единиц.

Поскольку мы собираемся описывать оборот основного капитала, введем еще одну характеристику производственной единицы — балансовую стоимость основных производственных фондов k_i. Начальная стоимость основных фондов определяется мощностью I_i, используемой технологией ν_i и экономической конъюнктурой в момент строительства τ_i, например ценой фондообразующего продукта в момент τ_i. Считаем, что стоимость пропорциональна мощности: $k_i(\tau_i) = I_i\alpha(\tau_i, \nu_i)$, где $\alpha(\tau_i, \nu_i)$ — стоимость создания единицы мощности, использующей технологию ν_i в момент τ_i. Со временем балансовая стоимость k_i уменьшается за счет амортизации, норму которой β считаем постоянной и одинаковой для всех производственных единиц [1]. Таким образом,

$$dk_i/dt = -\beta k_i, \; k_i(\tau_i) = I_i\alpha(\tau_i, \nu_i). \tag{1.3}$$

Предположим теперь, что в момент t работают, причем на полную мощность, только те производственные единицы, у которых выручка

[1] В общем случае $\beta \neq \mu$ (обычно $\beta > \mu$). Величина β устанавливается в законодательном порядке. Фактически величина β определяет изменение со временем платежей за основной капитал.